GROUPES DE WEYL ASSOCIÉS AUX CARQUOIS DE DYNKIN

GABRIELLE CHARBONNEAU-JODOIN
ADAM L'ARCHEVÊQUE GAUDET
SÉBASTIEN LABBÉ
AGNÈS MONGEAU
PIERRE-GUY PLAMONDON
LOUIS-PHILLIPE SAUMIER DEMERS

Résumé. Ce rapport présente le calcul de certains groupes de Weyl. On y retrouve une brève introduction aux groupes de Weyl associés aux graphes de Dynkin ainsi que deux résultats concernant les graphes $\mathbb{A}_n$ et $\mathbb{D}_n$. Il est prouvé que le groupe de Weyl associé au graphe $\mathbb{A}_n$ est isomorphe au groupe des permutations $\mathbb{S}_{n+1}$ de $n+1$ éléments et que le groupe de Weyl associé au graphe $\mathbb{D}_n$ est isomorphe au produit semi-direct de $\mathbb{S}_n$ par $\mathbb{Z}_2^{n-1}$.

Date: 4 août 2005.
Ce travail sur les groupes de Weyl a été effectué durant la session d'été 2005 au Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke et a été supervisé par les professeurs Ibrahim Assem et Thomas Brüstle dans le cadre d'une bourse de recherche de premier cycle du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie (CRSNG).

1. Introduction

Les diagrammes de Dynkin jouent un rôle important dans plusieurs branches des mathématiques, comme la théorie des groupes de réflexions, la théorie des groupes et des algèbres de Lie et la théorie des représentations des algèbres. Dans ce dernier domaine, le célèbre théorème de Gabriel dit qu'une algèbre héréditaire (sur un corps algébriquement clos) est de représentation finie si et seulement si le graphe sous-jacent au carquois de l'algèbre est un des diagrammes de Dynkin $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ et $\mathbb{E}_8$. En outre, les classes d'isomorphismes de modules indécomposables sur telle algèbre sont en bijection avec les racines positives de la forme quadratique associée au diagramme. Or, un algorithme bien connu (voir [1]) permet de calculer toutes les racines à partir de certaines d'entre elles au moyen de l'action d'un groupe, le groupe de Weyl du diagramme. Il est connu (voir [1]) que les groupes de Weyl associés aux diagrammes de Dynkin sont des groupes finis. Dans ce rapport, nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 1.1. *(a) Le groupe de Weyl correspondant au diagramme de Dynkin $\mathbb{A}_n$ est le groupe symétrique $\mathbb{S}_{n+1}$.*
(b) Le groupe de Weyl correspondant au diagramme de Dynkin $\mathbb{D}_n$ est le produit semi-direct $\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes \mathbb{S}_n$.

Ce résultat est bien connu (voir, par exemple, [3]). Notre démonstration est toutefois originale.

Ce rapport est organisé comme suit. Après une section préliminaire, consacrée au rappel des notions et résultats nécessaires à notre preuve, notre section 3 est consacrée à l'étude des relations entre les réflexions, lesquelles relations conduisent directement à la preuve de notre théorème dans le cas $\mathbb{A}_n$. Enfin, la dernière section est consacrée au cas $\mathbb{D}_n$.

2. Formes quadratiques et graphes de Dynkin

Dans cette section d'introduction, nous présentons les notions et résultats utiles à la compréhension du problème et à sa résolution. Aucune démonstration de ces résultats ne sera effectuée, puisqu'ils ne servent qu'à comprendre le contexte du problème. Les démonstrations des résultats de cette section se retrouvent, par exemple, dans le livre *Elements of the representation theory of associative algebras* ([1], Chapitre VII Sections 2 à 4).

Définition 2.1. Une *forme quadratique entière* est une fonction $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ définie pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par une expression de la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j \text{ où } a_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Définition 2.2. Soient $x, y \in \mathbb{Z}^n$. On définit la *forme bilinéaire symétrique* (x, y) *associée à* q par :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$$

Voici quelques propriétés de cette forme bilinéaire qui seront utiles par la suite. Ces propriétés découlent directement de la définition. Notons que, pour tout le reste du document, e_i représentera le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{Z}^n$.

Lemme 2.3. *Soient $x, y \in \mathbb{Z}^n$ et (x, y) la forme bilinéaire définie ci-dessus. Alors on a les propriétés suivantes :*

(1) $(x, y) = (y, x)$,
(2) $(ax + by, z) = a(x, y) + b(y, z)$,
(3) $2(e_i, e_j) = a_{ij}$, *pour* $i \neq j$ *où* $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$,
(4) $(e_i, e_i) = 1$, *pour tout* $i \in \{1, 2, ..., n\}$,
(5) $q(x + y) = q(x) + q(y) + 2(x, y)$. □

Définition 2.4. Soit q une forme quadratique entière. Un vecteur $x \in \mathbb{Z}^n$ est *racine de* q si $q(x) = 1$.

Définition 2.5. On définit la *réflexion* $s_i : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ par $s_i(x) = x - 2(x, e_i)e_i$.

Cette réflexion possède elle aussi certaines propriétés qui seront utiles, et qui sont des conséquences directes de la définition.

Lemme 2.6. *Soit s_i la réflexion définie ci-dessus. On a les propriétés suivantes :*

(1) $s_i(e_i) = -e_i$,
(2) $s_i^2(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{Z}^n$,
(3) s_i *est un automorphisme de* $\mathbb{Z}^n$,
(4) *si x est une racine d'une forme quadratique entière q, alors $s_i(x)$ est aussi une racine de q.* □

Définition 2.7. Soit q une forme quadratique entière. Le sous-groupe de $Aut(\mathbb{Z}^n)$ engendré par les s_i est le *groupe de Weyl de q*.

Définition 2.8. Un *carquois* est un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ où Q_0 est un ensemble de points, Q_1 est un ensemble de flèches reliant ces points, $s : Q_1 \to Q_0$ est une fonction qui associe à chaque flèche sa source et $b : Q_1 \to Q_0$ est une fonction qui associe à chaque flèche son but.

Définition 2.9. Soit Q un carquois fini, connexe et acyclique (c'est-à-dire qui ne possède pas de cycles orientés). La *forme de Tits de Q* est :

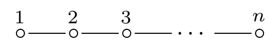
$$q_Q(x) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{b(\alpha)}$$

pour $x \in \mathbb{Z}^n$.

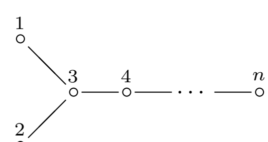
Remarque 2.10. Il est à noter que la forme de Tits d'un carquois est une forme quadratique entière au sens de la définition 2.1.

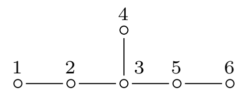
Voici les graphes sur lesquels portent le projet de recherche effectué. On les appelle graphes de Dynkin.

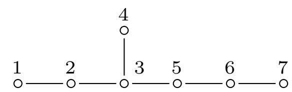
$\mathbb{A}_n =$

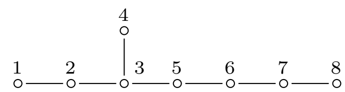


$\mathbb{D}_n =$



$\mathbb{E}_6 =$ 

$\mathbb{E}_7 =$ 

$\mathbb{E}_8 =$ 

Remarque 2.11. Soit Q un carquois. Le groupe de Weyl de q_Q est noté $W(\overline{Q})$. En effet, il est facile de voir que la forme quadratique q_Q ne dépend que du graphe sous-jacent $\overline{Q}$ de Q, et non de l'orientation du carquois.

Lemme 2.12. *Soit Q un carquois. On a*

$$s_i(x)_k = \begin{cases} x_k & , \quad si\ k \neq i \\ -x_i + \sum_{j-i} x_j & , \quad si\ k{=}i \end{cases}$$

où la somme porte sur les points j voisins de i. □

Théorème 2.13. *Soit Q un carquois dont le graphe sous-jacent $\overline{Q}$ est de Dynkin. Alors $W(\overline{Q})$ est un groupe fini.* □

Munis de ces définitions et de ces résultats, nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le problème. Il consiste à calculer les groupes de Weyl pour les graphes de Dynkin $\mathbb{A}_n$ et $\mathbb{D}_n$.

3. Présentation de $\mathbb{S}_n$ et groupe de Weyl

Lemme 3.1. *Soient Q un carquois et $W(\overline{Q})$ le groupe de Weyl qui lui est associé. Soient i et j deux points distincts de Q et s_i, s_j les réflexions de $W(\overline{Q})$ associées à i et j respectivement. Soit ε l'identité sur $W(\overline{Q})$. On a les deux propriétés suivantes :*

(1) $(s_is_j)^2 = \varepsilon$ *si et seulement si aucune flèche ne relie les points i et j*
(2) $(s_is_j)^3 = \varepsilon$ *si et seulement si une et une seule flèche relie les points i et j*

Démonstration

Avant de débuter, notons α le nombre de flèches reliant les points i et j. Comme $i \neq j$, on a que $(e_i, e_j) = (e_j, e_i) = \frac{\alpha}{2}$.

(1) Il est clair que $(s_is_j)^2 = \varepsilon$ si et seulement si $s_is_j = s_js_i$, ou encore si et seulement si $s_is_j(x) = s_js_i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$. En développant des deux côtés, on obtient :

$$\begin{aligned} & x - 2(x,e_j)e_j - 2(x,e_i)e_i + 4(x,e_j)(e_j,e_i)e_i \\ = \ & x - 2(x,e_j)e_j - 2(x - 2(x,e_j)e_j, e_i)e_i \\ = \ & x - 2(x,e_i)e_i - 2(x - 2(x,e_i)e_i, e_j)e_j \\ = \ & x - 2(x,e_i)e_i - 2(x,e_j)e_j + 4(x,e_i)(e_i,e_j)e_j \end{aligned}$$

En simplifiant, cela se ramène à l'égalité $4(x,e_j)(e_j,e_i)e_i = 4(x,e_i)(e_i,e_j)e_j$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$. Ainsi, notre énoncé est valide si et seulement si $2\alpha(x,e_j)e_i =$

$2\alpha(x, e_i)e_j$. Comme e_i et e_j sont linéairement indépendants, c'est le cas si et seulement si les points i et j ne sont pas voisins, c'est-à-dire si aucune flèche ne relie les points i et j.

(2) De la même manière, on a que $(s_i s_j)^3 = \varepsilon$ si et seulement si $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$ et ce si et seulement si $s_i s_j s_i(x) = s_j s_i s_j(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$. En développant, on obtient ensuite que

$$\begin{aligned} & x - 2(x, e_j)e_j + 4(x, e_i)(e_i, e_j)e_j + 4(x, e_j)(e_j, e_i)e_i - 8(x, e_i)(e_i, e_j)(e_j, e_i)e_i \\ = \; & x - 2(x, e_i)e_i + 4(x, e_j)(e_j, e_i)e_i + 4(x, e_i)(e_i, e_j)e_j - 8(x, e_j)(e_j, e_i)(e_i, e_j)e_j \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$, ce qui donne après simplifications

$$-2(x, e_j)e_j - 2\alpha^2(x, e_i)e_i = -2(x, e_i)e_i - 2\alpha^2(x, e_j)e_j$$

et cette égalité est valide si et seulement si $(2 - 2\alpha^2)(x, e_i)e_i = 0$ et $(2 - 2\alpha^2)(x, e_j)e_j = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$ car e_i et e_j sont linéairement indépendants. On voit bien que c'est le cas si et seulement si $(2 - 2\alpha^2) = 0$ et donc si et seulement si $\alpha \in \{1, -1\}$. Cependant, comme le nombre de flèches entre deux points ne peut être négatif, on en conclut que la première égalité est vraie si et seulement si une et une seule flèche relie les points i et j. □

Lemme 3.2. *Soit G un groupe engendré par n éléments $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Alors G est isomorphe à un quotient de $\mathbb{S}_{n+1}$ si les x_i vérifient les conditions suivantes :*

(1) $x_i^2 = \varepsilon$, *avec* $i = 1, 2, \ldots, n$ *;*

(2) $(x_i x_{i+1})^3 = \varepsilon$,*avec* $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *;*

(3) $(x_i x_j)^2 = \varepsilon$, *avec* $i \neq j+1$, $j \neq i+1$ *et* $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Démonstration Soient F le groupe libre engendré par les n éléments x_1, x_2, ..., x_n et N le plus petit sous-groupe distingué de F contenant les éléments suivants :

(1) x_i^2, avec $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2) $(x_i x_{i+1})^3$,avec $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(3) $(x_i x_j)^2$, avec $i \neq j+1$, $j \neq i+1$ et $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

On sait(voir [4], page 62) que F et N constituent une présentation de $\mathbb{S}_{n+1}$, c'est-à-dire que $F/N = \mathbb{S}_{n+1}$. De plus, on sait que G est engendré par n éléments. Il existe donc un sous-groupe distingué M de F tel que G est isomorphe à F/M.

En vertu de l'hypothèse sur G, N est inclus dans M. Comme M et N sont tous deux distingués dans F, il s'ensuit que N est distingué dans M et que le quotient M/N existe et est distingué dans F/N. De plus, le quotient de F/N par M/N est isomorphe à F/M.

Le lemme découle du fait que $F/N = \mathbb{S}_{n+1}$ et que $F/M = G$. Autrement dit, G est le quotient de $\mathbb{S}_{n+1}$ par M/N. □

Corollaire 3.3. *Le groupe de Weyl $W(\mathbb{A}_n)$ est isomorphe à un quotient du groupe $\mathbb{S}_{n+1}$.*

Démonstration On sait que $W(\mathbb{A}_n)$ est engendré par n éléments. Le corollaire découle directement du lemme 3.2. Les hypothèses du lemme sont assurées par les lemmes 2.6 et 3.1. □

Lemme 3.4. *Soient $s_{a_1}, s_{a_2}, s_{a_3}, ..., s_{a_m}$ des réflexions de $W(\overline{Q})$. S'il existe $k \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ tel que pour tout $j \in \{1, 2, 3, ..., m\}$, $k \neq j$ implique $a_k \neq a_j$, alors $s_{a_1} s_{a_2} \ldots s_{a_m} \neq \varepsilon$.*

DÉMONSTRATION Posons $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ l'ensemble des n réflexions qui engendrent $W(\overline{Q})$ et considérons le produit $\alpha = s_{a_1} s_{a_2} ... s_{a_j} ... s_{a_m}$ où m est un entier, $s_{a_i} \in S$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$ et s_{a_j} est une réflexion n'apparaissant qu'une seule fois dans l'expression.

On veut montrer que $\alpha \neq \varepsilon$. Pour cela, il suffit de trouver un élément de $\mathbb{Z}^n$, disons x, tel que $\alpha(x) \neq x$. Choisissons $x = s_{a_m} \ldots s_{a_{j+2}} s_{a_{j+1}}(e_{a_j})$. La j^e coordonnée de x est alors nécessairement égale à 1, puisque les $s_{a_{j+1}}, s_{a_{j+2}}, ..., s_{a_m}$ sont tous différents de s_{a_j}. On a alors

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= s_{a_1} s_{a_2} \ldots s_{a_j} \ldots s_{a_m}(x) \\ &= s_{a_1} s_{a_2} \ldots s_{a_j}(e_{a_j}) \\ &= s_{a_1} s_{a_2} \ldots s_{a_{j-1}}(-e_{a_j}) \end{aligned}$$

Puisque $s_{a_1}, s_{a_2}, \ldots, s_{a_{j-1}}$ sont tous différents de s_{a_j}, aucun de ceux-ci ne modifiera la j^e coordonnée qui est alors -1. Ainsi, $\alpha(x) \neq x$, ce qui implique que $\alpha \neq \varepsilon$. □

Considérons les éléments suivants de $W(\mathbb{A}_n)$:

$$y_{1,b_1} y_{2,b_2} \ldots y_{n,b_n}, \text{ où } 0 \leq b_i \leq i, \text{ pour tout } i \in \{1, ..., n\}$$

et

$$y_{i,b_i} = \begin{cases} s_i s_{i-1} \ldots s_{b_i} & , \ b_i \neq 0, \\ \varepsilon & , \ b_i = 0. \end{cases}$$

Lemme 3.5. *Soient $g = y_{1,b_1} y_{2,b_2} \ldots y_{n,b_n}$ et $h = y_{1,c_1} y_{2,c_2} \ldots y_{n,c_n}$. S'il existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $b_i \neq c_i$, alors $g \neq h$.*

DÉMONSTRATION Soient $g = y_{1,b_1} y_{2,b_2} \ldots y_{n,b_n}$ et $h = y_{1,c_1} y_{2,c_2} \ldots y_{n,c_n}$ tels que $g = h$. On a

$$\begin{aligned} & y_{1,b_1} y_{2,b_2} \ldots y_{n,b_n} = y_{1,c_1} y_{2,c_2} \ldots y_{n,c_n} \\ \text{si et seulement si} \quad & y_{1,b_1} y_{2,b_2} \ldots y_{n,b_n} y_{n,c_n}^{-1} \ldots y_{2,c_2}^{-1} y_{1,c_1}^{-1} = \varepsilon \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $b_j \neq c_j$ et soit $i = \max\{j \mid b_j \neq c_j\}$

$$\text{alors } y_{1,b_1} y_{2,b_2} \ldots y_{i,b_i} y_{i,c_i}^{-1} \ldots y_{2,c_2}^{-1} y_{1,c_1}^{-1} = \varepsilon$$

Posons $z = y_{i,b_i} y_{i,c_i}^{-1} = s_i s_{i-1} \ldots s_{b_i} s_{c_i} \ldots s_{i-1} s_i$.

Supposons $c_i < b_i$. Si $c_i < b_i - 1$, alors le lemme 3.1 indique que $s_j s_{c_i} = s_{c_i} s_j$, pour tout $n \geq j \geq b_i$. Donc, $y_{i,b_i} s_{c_i} = s_{c_i} y_{i,b_i}$. Dans ce cas, on ne considère plus le terme s_{c_i} et z devient $y_{i,b_i} y_{i,c_i+1}^{-1}$. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que $c_i = b_i - 1$. Alors, en vertu du lemme 3.1,

$$
\begin{aligned}
z &= s_i s_{i-1} \dots s_{b_i} s_{b_i-1} s_{b_i} \dots s_{i-1} s_i \\
&= s_i s_{i-1} \dots s_{b_i-1} s_{b_i} s_{b_i-1} \dots s_{i-1} s_i \\
&= s_{b_i-1} s_i s_{i-1} \dots s_{b_i+1} s_{b_i} s_{b_i+1} \dots s_{i-1} s_i s_{b_i-1}.
\end{aligned}
$$

On peut répéter ce processus jusqu'à ce que

$$
\begin{aligned}
z &= s_{b_i-1} \dots s_{i-2} s_i s_{i-1} s_i s_{i-2} \dots s_{b_i-1} \\
&= s_{b_i-1} \dots s_{i-2} s_{i-1} s_i s_{i-1} s_{i-2} \dots s_{b_i-1}.
\end{aligned}
$$

Il existe donc un seul s_i dans z et il n'existe aucun s_i dans les autres y_{k,b_k} et y_{k,c_k} donc $y_{1,b_1} y_{2,b_2} \dots y_{n,b_n} y_{n,c_n}^{-1} \dots y_{2,c_2}^{-1} y_{1,c_1}^{-1} \neq \varepsilon$ (en vertu du lemme 3.4), ce qui est une contradiction.

Donc, $b_i = c_i$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

Par conséquent, deux éléments écrits sous la forme $y_{1,b_1} \dots y_{n,b_n}$ et $y_{1,c_1} \dots y_{n,c_n}$ sont différents si un des indices b_1 est différent de c_i. $\square$

4. Groupe de Weyl associé à $\mathbb{A}_n$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer $W(\mathbb{A}_n)$.

Théorème 4.1. *$W(\mathbb{A}_n)$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathbb{S}_{n+1}$.*

Démonstration En vertu du corollaire 3.3 le groupe $W(\mathbb{A}_n)$ est isomorphe à un quotient de $\mathbb{S}_{n+1}$. Or, le lemme 3.5 stipule que deux éléments $g = y_{1,b_1} y_{2,b_2} \dots y_{n,b_n}$ et $h = y_{1,c_1} y_{2,c_2} \dots y_{n,c_n}$ sont différents si au moins un des indices b_i est différent de c_i. En remarquant qu'il existe exactement $(n+1)!$ éléments distincts pouvant s'écrire sous cette forme, on déduit que $W(\mathbb{A}_n)$ contient au moins $(n+1)!$ éléments, et donc qu'il est isomorphe au groupe $\mathbb{S}_{n+1}$ lui-même. $\square$

5. Groupe de Weyl associé à $\mathbb{D}_n$

Soit G le sous-groupe de $W(\mathbb{D}_n)$ engendré par les s_i, où i varie entre 2 et n et où la numérotation de $\mathbb{D}_n$ définie en introduction est utilisée.

Lemme 5.1. *Le groupe G est isomorphe à $\mathbb{S}_n$.*

Démonstration Selon le Lemme 3.1, on a que

$$
\begin{aligned}
(s_i s_j)^2 &= \varepsilon \text{ lorsque } 2 \le i, j \le n \text{ et } |i-j| \ge 2, \\
(s_i s_{i+1})^3 &= \varepsilon \text{ lorsque } 2 \le i \le n-1, \\
s_i^2 &= \varepsilon \text{ lorsque } 2 \le i \le n.
\end{aligned}
$$

En vertu du lemme 3.2, G est isomorphe à un groupe quotient de $\mathbb{S}_n$. Or, en vertu du lemme 3.5 et d'un raisonnement identique à celui utilisé dans la démonstration du théorème 4.1, G a au moins $n!$ éléments. Donc, $G \cong \mathbb{S}_n$ $\square$

$$
\text{On définit } p_k = \begin{cases} \prod_{i=3}^{k} s_i &, \ 3 \le k \le n, \\ \varepsilon &, \ k = 2. \end{cases}
$$

Par exemple, $p_5 = s_3s_4s_5$ et $p_6^{-1} = s_6s_5s_4s_3$. Soit H le sous-groupe de $\mathrm{W}(\mathbb{D}_n)$ engendré par les éléments $p_k^{-1}s_1s_2p_k$, où k varie de 2 à n.

Lemme 5.2. *Les générateurs de H sont d'ordre 2.*

Démonstration Soit $p_k^{-1}s_1s_2p_k$ où $2 \leq k \leq n$. On obtient aisément que

$$\begin{aligned}(p_k^{-1}s_1s_2p_k)(p_k^{-1}s_1s_2p_k) &= p_k^{-1}s_1s_2s_1s_2p_k \\ &= p_k^{-1}s_1s_1s_2s_2p_k = p_k^{-1}p_k = \varepsilon,\end{aligned}$$

□

Lemme 5.3. *H est un groupe abélien.*

Démonstration Il suffit de montrer que deux générateurs de H commutent. D'abord, on montre l'égalité suivante

$$(p_k^{-1}s_1s_2p_k)s_1 = s_2(p_k^{-1}s_1s_2p_k) \text{ où } 3 \leq k \leq n. \tag{1}$$

En effet,

$$\begin{aligned}(p_k^{-1}s_1s_2p_k)s_1 &= p_k^{-1}s_1s_2s_3s_1\prod_{i=4}^{k}s_i \\ &= p_k^{-1}s_2s_1s_3s_1\prod_{i=4}^{k}s_i \\ &= p_k^{-1}s_2s_3s_1s_3\prod_{i=4}^{k}s_i \\ &= (\prod_{i=4}^{k}s_i)^{-1}s_3s_2s_3s_1p_k \\ &= (\prod_{i=4}^{k}s_i)^{-1}s_2s_3s_2s_1p_k \\ &= s_2(\prod_{i=4}^{k}s_i)^{-1}s_3s_2s_1p_k \\ &= s_2(p_k^{-1}s_1s_2p_k).\end{aligned}$$

De plus, en calculant les inverses des deux termes de (1), on obtient

$$s_1(p_k^{-1}s_1s_2p_k) = (p_k^{-1}s_1s_2p_k)s_2 \text{ où } 3 \leq k \leq n. \tag{2}$$

De (1) et (2), on tire que l'élément $p_2^{-1}s_1s_2p_2 = s_1s_2$ commute avec tous les autres générateurs de H, car

$$p_k^{-1}s_1s_2p_ks_1s_2 = s_2p_k^{-1}s_1s_2p_ks_2 = s_2s_1p_k^{-1}s_1s_2p_k = s_1s_2p_k^{-1}s_1s_2p_k.$$

Montrons maintenant l'égalité suivante

$$(p_k^{-1}s_1s_2p_k)s_i = s_i(p_k^{-1}s_1s_2p_k) \text{ où } 3 \leq i < k \leq n. \tag{3}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
(p_k^{-1}s_1s_2p_k)s_i &= p_k^{-1}s_1s_2(\prod_{j=3}^{i-1}s_j)s_is_{i+1}s_i(\prod_{j=i+2}^{k}s_j) \\
&= p_k^{-1}s_1s_2(\prod_{j=3}^{i-1}s_j)s_{i+1}s_is_{i+1}(\prod_{j=i+2}^{k}s_j) \\
&= p_k^{-1}s_{i+1}s_1s_2p_k \\
&= (\prod_{j=i+2}^{k}s_j)^{-1}s_{i+1}s_is_{i+1}(\prod_{j=3}^{i-1}s_j)^{-1}s_1s_2p_k \\
&= (\prod_{j=i+2}^{k}s_j)^{-1}s_is_{i+1}s_i(\prod_{j=3}^{i-1}s_j)^{-1}s_1s_2p_k \\
&= s_i(\prod_{j=i+2}^{k}s_j)^{-1}s_{i+1}s_i(\prod_{j=3}^{i-1}s_j)^{-1}s_1s_2p_k \\
&= s_i(p_k^{-1}s_1s_2p_k).
\end{aligned}$$

Soient $p_k^{-1}s_1s_2p_k$ et $p_l^{-1}s_1s_2p_l$ deux générateurs de H tels que $3 \leq l < k \leq n$. On peut utiliser (3) successivement de même que (1) et (2) pour montrer qu'ils commutent :

$$\begin{aligned}
(p_k^{-1}s_1s_2p_k)(p_l^{-1}s_1s_2p_l) &= p_l^{-1}(p_k^{-1}s_1s_2p_k)s_1s_2p_l \\
&= p_l^{-1}s_2(p_k^{-1}s_1s_2p_k)s_2p_l \\
&= p_l^{-1}s_2s_1(p_k^{-1}s_1s_2p_k)p_l \\
&= p_l^{-1}s_2s_1p_l(p_k^{-1}s_1s_2p_k) \\
&= (p_l^{-1}s_1s_2p_l)(p_k^{-1}s_1s_2p_k),
\end{aligned}$$

car tous les s_i qui composent p_l sont tels que $3 \leq i \leq k$. □

Corollaire 5.4. *Les éléments de H s'écrivent sous la forme*

$$\prod_{k=2}^{n}(p_k^{-1}s_1s_2p_k)^{\beta_i} \text{ où } \beta_i \in \{0,1\}.$$

□

Corollaire 5.5. *Il existe un homomorphisme surjectif $\overline{f} : \mathbb{Z}_2^{n-1} \to H$.*

Démonstration Soit la fonction $f : \mathbb{Z}_2^{n-1} \to H$ définie par $b_k \mapsto p_k^{-1}s_1s_2p_k$, où $2 \leq k \leq n$ et b_k est le vecteur de $\mathbb{Z}_2^{n-1}$ ayant un 1 en position $k-1$ et des 0 partout ailleurs. Soit $\overline{f} : \mathbb{Z}_2^{n-1} \to H$ l'homomorphisme induit par f. Cet homomorphisme est surjectif en conséquence du Corollaire 5.4. □

Les prochaines démonstrations utiliseront le calcul des images des e_i par les générateurs de H. Voici le résultat de ces calculs.

Lemme 5.6. *L'image de l'élément e_i par les générateurs de H est donnée par les formules suivantes où $k \geq 3$.*

$$
\text{(4)} \qquad s_1s_2(e_i) = \begin{cases} -e_1 & , \ i=1 \\ -e_2 & , \ i=2 \\ e_1+e_2+e_3 & , \ i=3 \\ e_i & , \ i \geq 4 \end{cases}
$$

$$
\text{(5)} \qquad p_k^{-1}s_1s_2p_k(e_i) = \begin{cases} e_2 & , \ i=1 \\ e_1 & , \ i=2 \\ e_i & , \ 3 \leq i < k \\ -(e_1+e_2+2(e_3+\ \dots\ +e_{k-1})+e_k) & , \ i=k \\ e_1+e_2+2(e_3+\ \dots\ +e_k)+e_{k+1} & , \ i=k+1 \\ e_i & , \ i \geq k+2 \end{cases}
$$

Démonstration La formule (4) est facile à prouver, de même que les formules (6) et (7) suivantes où $k \geq 3$.

$$
\text{(6)} \qquad p_k(e_i) = \begin{cases} e_1+e_3 & , \ i=1 \\ e_2+e_3 & , \ i=2 \\ e_{i+1} & , \ 3 \leq i < k \\ -(e_3+e_4+\ \dots\ +e_{k-1}+e_k) & , \ i=k \\ e_3+e_4+\ \dots\ +e_k+e_{k+1} & , \ i=k+1 \\ e_i & , \ i \geq k+2 \end{cases}
$$

$$
\text{(7)} \qquad p_k^{-1}(e_i) = \begin{cases} e_1+e_3+e_4+\ \dots\ +e_{k-1}+e_k & , \ i=1 \\ e_2+e_3+e_4+\ \dots\ +e_{k-1}+e_k & , \ i=2 \\ -(e_3+e_4+\ \dots\ +e_{k-1}+e_k) & , \ i=3 \\ e_{i-1} & , \ 4 \leq i \leq k \\ e_k+e_{k+1} & , \ i=k+1 \\ e_i & , \ i \geq k+2 \end{cases}
$$

Calculons maintenant les images des e_i par $p_k^{-1}s_1s_2p_k$ pour toutes les valeurs de i. Cela justifiera l'équation (5).

$$
\begin{aligned}
p_k^{-1}s_1s_2p_k(e_1) &= p_k^{-1}s_1s_2(e_1+e_3) \\
&= p_k^{-1}\big(s_1s_2(e_1)+s_1s_2(e_3)\big) \\
&= p_k^{-1}\big((-e_1)+(e_1+e_2+e_3)\big) \\
&= p_k^{-1}\big(e_2+e_3\big) \\
&= e_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_k^{-1}s_1s_2p_k(e_2) &= p_k^{-1}s_1s_2(e_2+e_3) \\
&= p_k^{-1}\big(s_1s_2(e_2)+s_1s_2(e_3)\big) \\
&= p_k^{-1}\big((-e_2)+(e_1+e_2+e_3)\big) \\
&= p_k^{-1}\big(e_1+e_3\big) \\
&= e_1
\end{aligned}
$$

Si $3 \leq i < k$, alors

$$\begin{aligned} p_k^{-1} s_1 s_2 p_k(e_i) &= p_k^{-1} s_1 s_2(e_{i+1}) \\ &= p_k^{-1}(e_{i+1}) \\ &= e_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_k^{-1} s_1 s_2 p_k(e_k) &= p_k^{-1} s_1 s_2\big(-(e_3+e_4+\ \dots\ +e_{k-1}+e_k)\big) \\ &= -p_k^{-1}\big(s_1 s_2(e_3) + s_1 s_2(e_4+\ \dots\ +e_{k-1}+e_k)\big) \\ &= -p_k^{-1}\big((e_1+e_2+e_3)+(e_4+\ \dots\ +e_{k-1}+e_k)\big) \\ &= -p_k^{-1}(e_1+e_2+\ \dots\ +e_{k-1}+e_k) \\ &= -\big(p_k^{-1}(e_1)+p_k^{-1}(e_2)+p_k^{-1}(e_3+\ \dots\ +e_{k-1}+e_k)\big) \\ &= -\big((e_1+e_3+\ \dots\ +e_k)+(e_2+e_3+\ \dots\ +e_k)+(-e_k)\big) \\ &= -(e_1+e_2+2(e_3+\ \dots\ +e_{k-1})+e_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_k^{-1} s_1 s_2 p_k(e_{k+1}) &= p_k^{-1} s_1 s_2(e_3+e_4+\ \dots\ +e_k+e_{k+1}) \\ &= p_k^{-1}\big(s_1 s_2(e_3)+s_1 s_2(e_4+\ \dots\ +e_k+e_{k+1})\big) \\ &= p_k^{-1}\big((e_1+e_2+e_3)+(e_4+\ \dots\ +e_k+e_{k+1})\big) \\ &= p_k^{-1}(e_1+e_2+\ \dots\ +e_k+e_{k+1}) \\ &= p_k^{-1}(e_1)+p_k^{-1}(e_2)+p_k^{-1}(e_3+\ \dots\ +e_k+e_{k+1}) \\ &= (e_1+e_3+\ \dots\ +e_k)+(e_2+e_3+\ \dots\ +e_k)+(e_{k+1}) \\ &= e_1+e_2+2(e_3+\ \dots\ +e_k)+e_{k+1} \end{aligned}$$

Si $i \geq k+2$, alors

$$\begin{aligned} p_k^{-1} s_1 s_2 p_k(e_i) &= p_k^{-1} s_1 s_2(e_i) \\ &= p_k^{-1}(e_i) \\ &= e_i. \end{aligned}$$

□

Lemme 5.7. *Les générateurs de H sont indépendants.*

Démonstration Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un générateur de H qui peut être exprimé en fonction des autres. Il existe donc une égalité

$$\varepsilon = \prod_{k=2}^{n} (p_k^{-1} s_1 s_2 p_k)^{\beta_k},\ \beta_k \in \{0,1\}$$

où les β_k sont non tous nuls. On choisit m comme étant le plus grand indice tel que $\beta_m = 1$. Si $m = 2$, alors $\varepsilon = p_2^{-1} s_1 s_2 p_2 = s_1 s_2$ et $s_1 = s_2$ ce qui est impossible. Si $m \geq 3$, on écrit la dernière égalité de la façon suivante

$$p_m^{-1} s_1 s_2 p_m = (p_{m-1}^{-1} s_1 s_2 p_{m-1})^{\beta_{m-1}} \prod_{k=2}^{m-2} (p_k^{-1} s_1 s_2 p_k)^{\beta_k} \tag{8}$$

et on considère l'élément e_m. D'après (5), l'image de e_m par $p_m^{-1} s_1 s_2 p_m$ est $-(e_1 + e_2 + 2(e_3 +\ \dots\ + e_{m-1}) + e_m)$. Or, $\prod_{k=2}^{m-2} (p_k^{-1} s_1 s_2 p_k)^{\beta_k}$ fixe e_m, comme l'implique

(5). Donc, $\beta_{m-1} \neq 0$. Or, d'après (5), l'image de e_m par $p_{m-1}^{-1}s_1s_2p_{m-1}$ est $e_1 + e_2 + 2(e_3 + \ ... \ + e_{m-1}) + e_m$. Ainsi, l'image de e_m par les deux membres de l'égalité (8) est différente. Donc, cette égalité ne peut être vérifiée et on conclut que les générateurs de H sont indépendants. □

Corollaire 5.8. *La cardinalité de H est égale à 2^{n-1}.*

Démonstration Il existe 2^{n-1} éléments de la forme $\prod_{k=2}^{n}(p_k^{-1}s_1s_2p_k)^{\beta_k}$ (où β_k prend les valeurs 0 ou 1) et tous les éléments de H s'écrivent sous cette forme, comme le stipule le corollaire 5.4. D'où $|H| \leq 2^{n-1}$. De plus, le lemme 5.7 nous indique que les générateurs de H sont indépendants. Les éléments s'écrivant sous la forme $\prod_{k=2}^{n}(p_k^{-1}s_1s_2p_k)^{\beta_k}$ sont donc tous distincts. Il s'ensuit que $2^{n-1} \leq |H|$. Le résultat découle des deux inégalités. □

Corollaire 5.9. *H est isomorphe à $\mathbb{Z}_2^{n-1}$.*

Démonstration Il existe un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}_2^{n-1}$ sur H (en vertu du corollaire 5.5). De plus, les deux groupes ont la même cardinalité (en vertu du corollaire 5.8). L'homomorphisme est donc bijectif. □

Lemme 5.10. *H est un sous-groupe distingué de $W(\mathbb{D}_n)$.*

Démonstration Soient $a \in W(\mathbb{D}_n)$ et $b \in H$. On veut montrer que $aba^{-1} \in H$. Il suffit de le montrer pour les générateurs de $\mathrm{W}(\mathbb{D}_n)$ et de H. Soit s_i un générateur de $\mathrm{W}(\mathbb{D}_n)$. Alors,

$$(9) \qquad s_i(p_2^{-1}s_1s_2p_2)s_i^{-1} = s_is_1s_2s_i = \begin{cases} s_2s_1 & , \ i = 1 \\ s_2s_1 & , \ i = 2 \\ s_3s_2s_1s_3 & , \ i = 3 \\ s_1s_2 & , \ i \geq 4 \end{cases}$$

$$(10) \qquad s_i(p_k^{-1}s_1s_2p_k)s_i^{-1} = \begin{cases} s_1s_2(p_k^{-1}s_1s_2p_k) & , \ i = 1 \text{ en utilisant (1)} \\ s_2s_1(p_k^{-1}s_1s_2p_k) & , \ i = 2 \text{ en utilisant (2)} \\ p_k^{-1}s_1s_2p_k & , \ 3 \leq i < k \text{ en utilisant (3)} \\ p_{k-1}^{-1}s_1s_2p_{k-1} & , \ i = k \\ p_{k+1}^{-1}s_1s_2p_{k+1} & , \ i = k+1 \\ p_k^{-1}s_1s_2p_k & , \ i \geq k+2 \end{cases}$$

On remarque que le résultat appartient à H dans chacun des cas. □

Lemme 5.11. *$G \cdot H = W(\mathbb{D}_n)$.*

Démonstration D'abord, $G \cdot H$ est un sous-groupe de $W(\mathbb{D}_n)$, car H est distingué. Aussi, $s_i \in G$ pour $2 \leq i \leq n$. Donc, $s_i = s_i\varepsilon \in G \cdot H$ pour $2 \leq i \leq n$, car $\varepsilon \in H$. De plus, $s_1 = s_1s_2s_2 = s_2s_1s_2 \in G \cdot H$. Donc, $\{s_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subset G \cdot H$. Par conséquent, $W(\mathbb{D}_n) \subseteq G \cdot H$, d'où $G \cdot H = W(\mathbb{D}_n)$. □

Lemme 5.12. *$G \cap H = \{\varepsilon\}$*

Démonstration Soit $\alpha \in G \cap H$. Supposons que $\alpha \neq \varepsilon$. Puisque $\alpha \in H$, on peut écrire

$$\alpha = \prod_{k=2}^{n}(p_k^{-1}s_1s_2p_k)^{\beta_k}, \beta_k \in \{0, 1\}$$

où les β_k sont non tous nuls. Posons $m = \min\{l \mid \beta_l = 1\}$.

(1) Si $m = 2$, alors

$$\begin{aligned}\alpha(e_1) &= \prod_{k=3}^{n} (p_k^{-1} s_1 s_2 p_k)^{\beta_k} (s_1 s_2(e_1)) \\ &= \prod_{k=3}^{n} (p_k^{-1} s_1 s_2 p_k)^{\beta_k} (-e_1).\end{aligned}$$

Donc, $\alpha(e_1) \in \{-e_1, -e_2\}$ (en vertu de l'équation (5)), ce qui implique que α modifie la première coordonnée de e_1.

(2) Si $m \geq 3$, alors, en vertu de l'équation (5),

$$\begin{aligned}\alpha(e_m) &= \prod_{k=m}^{n} (p_k^{-1} s_1 s_2 p_k)^{\beta_k} (e_m) \\ &= p_m^{-1} s_1 s_2 p_m (e_m) \\ &= -e_1 - e_2 - 2(e_3 + e_4 + \ldots + e_{m-1}) - e_m.\end{aligned}$$

Ainsi, α modifie la première coordonnée de e_m.

Autrement dit, dans les deux cas, il existe un s_1 non simplifiable dans le développement de α, donc $\alpha \notin G$, ce qui est une contradiction. On conclut que $\alpha = \varepsilon$. □

Théorème 5.13. *$W(\mathbb{D}_n)$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes \mathbb{S}_n$.*

Démonstration Le lemme 5.11 nous dit que $W(\mathbb{D}_n) = G \cdot H$. De plus, le lemme 5.12 nous assure que l'intersection de G et de H est triviale. Finalement, le lemme 5.10 stipule que H est distingué dans $W(\mathbb{D}_n)$. En vertu d'une simple application de la définition, on en déduit que $W(\mathbb{D}_n)$ est le produit semi-direct de G et H. Le théorème découle des lemmes 5.1 et 5.9, qui montrent que G est isomorphe à $\mathbb{S}_n$ et que H est isomorphe à $\mathbb{Z}_2^{n-1}$. □

Références

[1] I.ASSEM, D.SIMSON et A.SKOWRONSKI, *Elements of the representation theory of associative algebras*, Cambridge University Press, à paraître.

[2] B.BAUMSLAG et B.CHANDLER, *Schaum's outline of Group Theory*, Mcgraw-hill book company, 1968.

[3] N.BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Paris, 1968. (Chapitre 4 à 6)

[4] D.L.JOHNSON, *Presentations of groups*, London Mathematical Society student texts, Cambridge University Press, 1990.

[5] J.J.ROTMAN, *The Theory of Groups (an introduction)*, 2^{eme} edition, Allyn and Bacon series in advanced mathematics, 1973.

Coordonnées

Auteurs :

Gabrielle.Charbonneau-Jodoin@USherbrooke.ca
Sebastien.Labbe2@USherbrooke.ca
Adam.Larcheveque.Gaudet@USherbrooke.ca
Agnes.Mongeau@USherbrooke.ca
Pierre-Guy.Plamondon@USherbrooke.ca
Louis-Philippe.Saumier.Demers@USherbrooke.ca

Établissement :

Département de mathématiques
Université de Sherbrooke
2500 boulevard de l'Université
Sherbrooke, Québec, J1K 2R1