

Caractéristiques d'Euler et théorème de Pick

François Dubeau et Sébastien Labbé

Département de mathématiques
Université de Sherbrooke
Sherbrooke (Qc), Canada, J1K 2R1

Francois.Dubeau@usherbrooke.ca
Sebastien.Labbe2@usherbrooke.ca

Résumé. Le Théorème de Pick sert à calculer l'aire de certains types de polygones, ceux dont les sommets ont des coordonnées entières dans le plan. Dans ce travail nous définissons d'une façon très générale un polygone et nous introduisons la notion de face et de trou. Nous discutons de la décomposition en triangles d'un polygone. Ensuite nous introduisons un réseau, les triangles élémentaires associés à un réseau et les triangulations de tout polygone de réseau. Le Théorème de Pick est alors rappelé et démontré pour les polygones simples. Ensuite une forme très générale du théorème est obtenue pour des polygones quelconques, des polygones généralisés et des unions de polygones généralisés en utilisant les caractéristiques d'Euler originales et modifiées.

Abstract. Pick's Theorem is used to compute the area of lattice polygons. In this paper we present a very general definition of a polygon to obtain the definition of faces and holes of a polygon. The decomposition of a polygon into triangles is briefly discussed. Then lattices are introduced with their corresponding elementary triangles and triangulations. We recall and prove Pick's Theorem for simple polygons. Then a generalization of Pick's Theorem is proved for very general lattice polygons, generalized lattice polygons and union of generalized lattice polygons using original and modified Euler's characteristics.

AMS Subject Classification : 51M25, 52A38, 52B20.

Mots clés : decomposition, triangulation, réseau, polygone généralisé, théorème de Pick, caractéristiques d'Euler.

1. INTRODUCTION

Georg Alexander Pick publia en 1899 sa formule dans un article ayant pour titre "Geometrisches zur Zahlenlehre" dans la revue *Zeitsschrift d. vereines 'Lotos'* de Prague [19]. Pendant près d'un demi-siècle, ce résultat resta inconnu. C'est dans *Mathematical Snapshots* [28] (aussi disponible en français [29]) que Hugo Steinhaus l'a réellement fait connaître sans nommer Pick dans le texte mais en insérant la référence de son article à la bibliographie.

La formule de Pick est utilisée pour calculer l'aire d'un polygone de réseau dans le plan. Un polygone de réseau est un polygone dont les sommets ont des coordonnées

entières dans un système d'axes prédéfini. L'aire d'un tel polygone P est alors donnée par la relation

$$(1.1) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{B}{2} - 1$$

où B est le nombre de points frontières et I est le nombre de points à l'intérieur du polygone. On aura l'occasion de mieux définir ces termes à la prochaine section.

À la Figure 1 par exemple, $I = 7$, $B = 16$ et l'aire du polygone est alors

$$\text{Aire}(P) = 7 + \frac{16}{2} - 1 = 14.$$

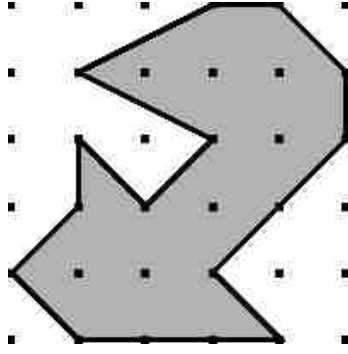


FIGURE 1. Un premier exemple.

Depuis les années 1960, plusieurs articles ont été publiés sur la formule de Pick. On y trouve diverses preuves du théorème [1, 3, 4, 12, 13, 17, 21, 28, 29, 30] ou d'équivalence avec d'autres résultats [5, 8, 9, 16], des généralisations à des polygones [2, 6, 10, 11, 25, 26, 27, 31] et à des réseaux [20, 24] plus généraux et même à des espaces à trois dimensions et plus [14, 22, 23, 26].

Le but de ce travail est d'obtenir une généralisation de la formule de Pick pour des polygones très généraux en utilisant les caractéristiques d'Euler.

2. POLYGONE

Cette section utilise un sens de parcours d'un polygone pour déterminer l'intérieur et l'extérieur d'un polygone. Une fois ces régions bien identifiées on peut négliger le sens de parcours et ne considérer que le périmètre.

Un **polygone** P est un ensemble (ordonné) de points du plan, pas nécessairement distincts, noté $\mathcal{V}(P) = \{a_i | i = 0, \dots, V \text{ avec } a_0 = a_V\}$. On appelle ces points les V **sommets** du polygone. Deux points successifs a_{i-1} et a_i joints entre eux forment le **côté** $\overline{a_{i-1}a_i}$, ainsi

$$\overline{a_{i-1}a_i} = \{(1 - \lambda)a_{i-1} + \lambda a_i \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

L'ensemble des côtés du polygone P est noté

$$\mathcal{E}(P) = \{\overline{a_{i-1}a_i} | i = 1, \dots, V\}.$$

La trace dans le plan de l'ensemble des côtés est le **périmètre**, ou la **frontière**, du polygone noté

$$\partial P = \cup_{i=1}^V \overline{a_{i-1}a_i}.$$

Le périmètre est obtenu en parcourant les côtés reliant les sommets $a_i \in \mathcal{V}(P)$ pour $i = 0, \dots, V$. On définit ainsi un sens de parcours du polygone. On peut supposer, en ajoutant des sommets a_i si nécessaire, que deux côtés $\overline{a_{i-1}a_i}$ et $\overline{a_{j-1}a_j}$ (C.1) ne s'intersectent pas, c'est-à-dire

$$\overline{a_{i-1}a_i} \cap \overline{a_{j-1}a_j} = \emptyset;$$

(C.2) ne s'intersectent qu'en une de leur extrémité, c'est-à-dire

$$\overline{a_{i-1}a_i} \cap \overline{a_{j-1}a_j} = \{a_{i-1}\} \quad \text{ou} \quad \{a_i\};$$

(C.3) se superposent exactement, c'est-à-dire

$$\overline{a_{i-1}a_i} = \overline{a_{j-1}a_j}.$$

Un polygone P délimite un certain nombre de régions connexes Ω_l à l'aide de son périmètre ∂P , ce sont les composantes connexes du complémentaire de P . La région connexe non bornée Ω_∞ délimitée par P est appelée l'**horizon** de P . Une région connexe bornée délimitée par P est appelée un **trou**, notée Ω_l^e , si toute ligne polygonale partant d'un point de cette région et se terminant dans l'horizon croise un nombre pair de côtés du polygone P . L'union de l'horizon Ω_∞ et des $L^e(P)$ trous Ω_l^e forme l'**extérieur** de P , noté P^e . On a

$$P^e = \Omega_\infty \cup \left[\bigcup_{l=1}^{L^e(P)} \Omega_l^e \right].$$

D'autre part une région connexe bornée déterminée par P est appelée une **face** de P , notée Ω_l^i , si toute ligne polygonale partant d'un point de cette région et se terminant dans l'extérieur de P croise un nombre impair de côté(s) du polygone P . L'union des $L^i(P)$ faces Ω_l^i forme l'**intérieur** du polygone P , noté P^i . On a

$$P^i = \bigcup_{l=1}^{L^i(P)} \Omega_l^i.$$

Ainsi un polygone partitionne le plan \mathbb{R}^2 à l'aide de son périmètre de la façon suivante

$$\mathbb{R}^2 = \partial P \cup P^i \cup P^e.$$

L'**aire** d'un polygone est l'aire de son intérieur c'est-à-dire la somme des aires de ses faces.

Notons qu'une même région connexe délimitée par ∂P peut être une face ou un trou du polygone P , tout dépend de la façon que le périmètre ∂P est parcouru selon $\mathcal{V}(P)$.

Deux régions connexes d'un polygone sont dites **adjacentes** si elles ont au moins un côté en commun. Dans le cas contraire elles sont dites **non adjacentes**. Habituellement les régions adjacentes sont une face et un trou ou bien une face et l'horizon, mais avec la définition de polygone donnée ici, deux faces peuvent être adjacentes et, de même, deux trous ou un trou et l'horizon peuvent être adjacents. C'est ce qui peut arriver en admettant la condition (C.3).

Une partie connexe maximale du périmètre ∂P est appelée une **branche** si

- (i) elle est entièrement contenue dans une même région (intérieure ou extérieure),
- (ii) elle est attachée au reste du périmètre en un seul endroit (sommet), et
- (iii) en supprimant la branche on ne modifie pas le nombre de régions connexes du polygone.

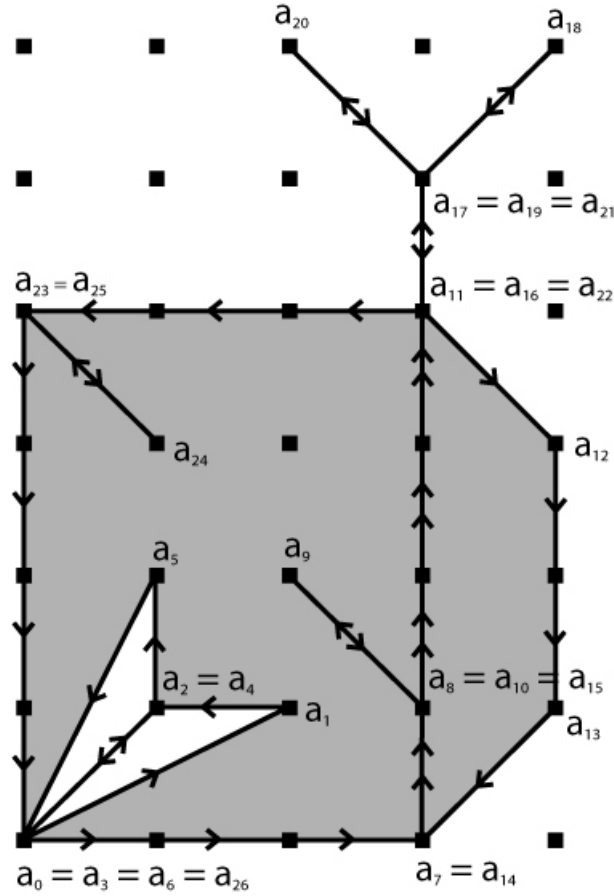


FIGURE 2. Polygone avec son sens de parcours et ses sommets.

Une partie connexe maximale du périmètre ∂P est appelé une *cloison* si

- (i) elle sépare une même région ou deux régions du même type (intérieure ou extérieure),
- (ii) elle est attachée au reste du périmètre en exactement deux endroits (sommets), et
- (iii) en supprimant toute partie de la cloison le nombre de régions diminue de 1 ou bien le nombre de régions reste constant mais le nombre de composantes connexes du périmètre contenant des régions bornées augmente de 1.

La suppression d'un côté d'une cloison a pour effet de réunir deux régions connexes de même type en une seule ou de déconnecter le périmètre et former deux polygones ayant chacun au moins une région bornée (une face ou un trou). Le restant de la cloison devient alors une branche.

On dira, selon le cas, qu'on a une cloison ou une branche interne ou externe. La Figure 2 illustre un polygone et son sens de parcours, avec un ensemble $\mathcal{V}(P)$ de $V = 26$ sommets. Ce polygone a trois cloisons: deux internes $(\overline{a_7a_8} \cup \overline{a_{14}a_{15}})$

et $\overline{a_{10}a_{11}} \cup \overline{a_{15}a_{16}}$) et une externe ($\overline{a_2a_3} \cup \overline{a_3a_4}$), et 3 branches: deux internes ($\overline{a_8a_9} \cup \overline{a_9a_{10}}$ et $\overline{a_{23}a_{24}} \cup \overline{a_{24}a_{25}}$) et une externe ($\bigcup_{i=16}^{21} \overline{a_i a_{i+1}}$).

Les régions connexes bornées Ω_l correspondent à des polygones $P(\Omega_l)$ plus simples qui peuvent être décrits par une suite de sommets $\mathcal{V}(P(\Omega_l)) = \{a_i^l | i = 0, \dots, V_l \text{ avec } a_0^l = a_{V_l}^l\}$ qui servent à former l'ensemble des côtés $\mathcal{E}(P(\Omega_l)) = \{\overline{a_{i-1}^l a_i^l} | i = 1, \dots, V_l\}$ et le périmètre $\partial P(\Omega_l) = \bigcup_{i=1}^{V_l} \overline{a_{i-1}^l a_i^l}$ du polygone. Cette suite de points $\mathcal{V}(P(\Omega_l))$ peut-être choisie pour que la région Ω_l soit toujours "à gauche" du côté $\overline{a_{i-1}^l a_i^l}$ pour tout i (voir la Figure 3). On parcourt ainsi le périmètre du polygone $P(\Omega_l)$ dans le sens anti-horaire. L'*intérieur* $P^i(\Omega_l)$ du polygone est donc Ω_l et on définit l'*extérieur* $P^e(\Omega_l)$ du polygone $P(\Omega_l)$ par

$$P^e(\Omega_l) = \mathbb{R}^2 \setminus [\partial P(\Omega_l) \cup P^i(\Omega_l)].$$

Ainsi

$$\mathbb{R}^2 = \partial P(\Omega_l) \cup P^i(\Omega_l) \cup P^e(\Omega_l).$$

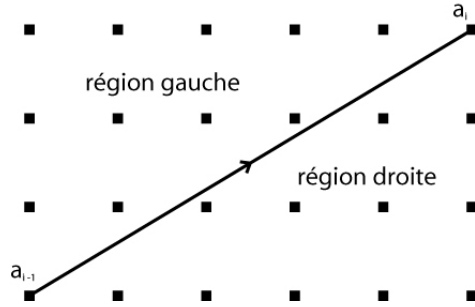


FIGURE 3. Régions à gauche et à droite du côté $\overline{a_{i-1}a_i}$.

Les régions connexes bornées Ω_l d'un polygone P sont de deux types: les régions dites *simples* et les régions dites *quasi-simples*. Une région Ω est dite *simple* si aucun de ses sommets, sauf a_0 et a_V , ne se répète dans $\mathcal{V}(P(\Omega)) = \{a_i | i = 0, \dots, V \text{ avec } a_0 = a_V\}$. Dans ce cas le polygone $P(\Omega)$ sera appelé *polygone simple*. Une région Ω est dite *quasi-simple* si il y a au moins un de ses sommets, autre que a_0 et a_V , qui se répète dans $\mathcal{V}(P(\Omega)) = \{a_i | i = 1, \dots, V \text{ avec } a_0 = a_V\}$. Dans ce cas le polygone $P(\Omega)$ sera appelé *polygone quasi-simple*.

La Figure 4 présente deux polygones; un simple et un quasi-simple. Pour le polygone simple on a $V = 6$ tandis que pour le polygone quasi-simple on a $V = 16$ avec 3 répétitions.

La Figure 5 présente les différentes régions connexes bornées associées au polygone P de la Figure 2. Il y a deux faces, Ω_1^i et Ω_2^i , et deux trous Ω_1^e et Ω_2^e . De plus les régions Ω_2^i , Ω_1^e , Ω_2^e sont simples et la région Ω_1^i est quasi-simple.

3. DÉCOMPOSITION DE POLYGONE

Une *diagonale* d'un polygone P est un segment entièrement contenu dans une seule face Ω_l du polygone, qui relie deux sommets de P et dont l'intersection du segment avec le périmètre ne contient que les deux sommets en question.

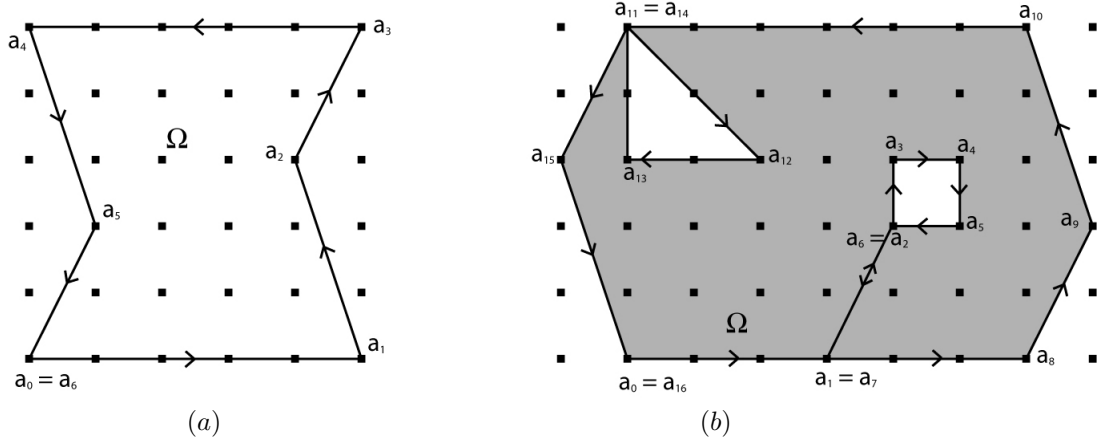


FIGURE 4. Polygone ou face (a) simple, (b) quasi-simple.

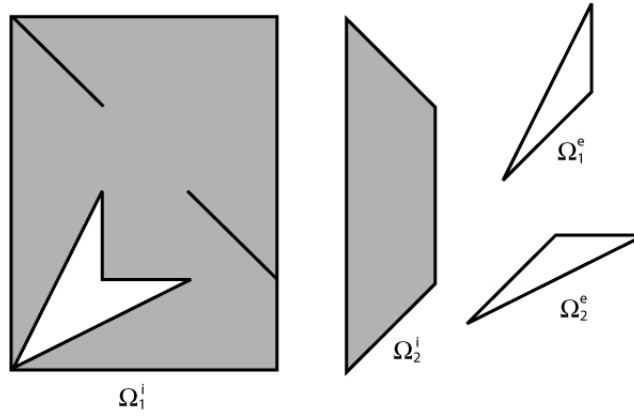


FIGURE 5. Faces et trous, régions simples et quasi-simples associées au polygone de la Figure 2.

Si on peut ajouter des diagonales qui ne se croisent pas (sauf à leurs extrémités) à un polygone P jusqu'à ce que l'intérieur P^i de P soit partitionné en triangles on dit qu'on a une **décomposition** de P notée $\Delta(P)$.

Le prochain résultat concerne l'existence d'une décomposition $\Delta(P)$ d'un polygone simple ou quasi-simple P . La démonstration de ce résultat qu'on retrouve par exemple dans [15] ou [18] pour les polygones simples peut très bien s'appliquer aux polygones quasi-simples.

Lemme 3.1. Soit P un polygone simple ou quasi-simple de sommets $\mathcal{V}(P) = \{v_i | i = 0, \dots, V\}$. Alors

- (i) il existe au moins une décomposition $\Delta(P)$ de P ,
- (ii) toute décomposition $\Delta(P)$ de P contient $V-2$ triangles et l'ensemble des sommets des triangles est l'ensemble des sommets du polygone simple ou quasi-simple P , et
- (iii) la somme des angles internes de P est $(V-2)\pi$. □

Puisque les faces d'un polygone sont simples ou quasi-simples, tout polygone P possède une décomposition $\Delta(P)$.

La Figure 6 illustre le résultat du Lemme 3.1 avec un polygone quasi-simple de $V = 10$ sommets et 2 répétitions.

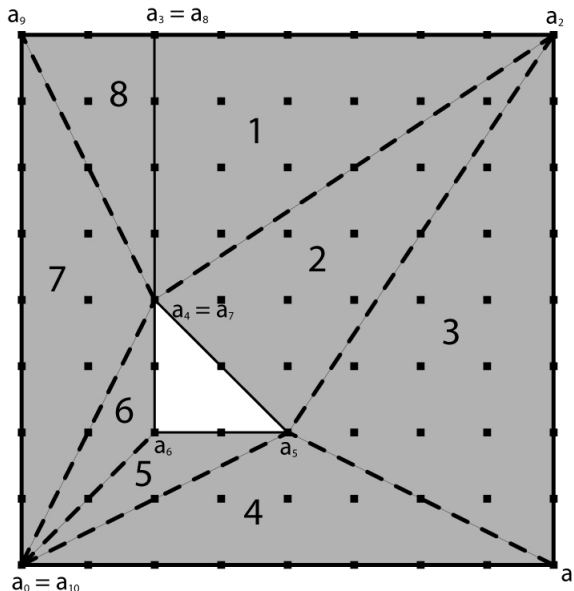


FIGURE 6. Décomposition d'un polygone quasi-simple.

4. POLYGONE DE RÉSEAU ET TRIANGULATION

Un **réseau** est l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 à coordonnées entières par rapport à une base choisie. Ici nous prendrons la base canonique de \mathbb{R}^2 . Un **polygone de réseau** est un polygone dont tous les sommets appartiennent au réseau. Un **point frontière** est un point du réseau sur le périmètre d'un polygone de réseau. Nous noterons par $\partial^d P$ les points distincts du périmètre ∂P qui sont des points de réseau, en fait

$$\partial^d P = \{b \in \partial P \mid b \text{ est un point du réseau}\}.$$

Un **point intérieur** est un point du réseau dans l'intérieur P^i du polygone P .

Un triangle est dit **élémentaire** s'il est un polygone simple de réseau n'ayant aucun point intérieur et trois points frontières. Une **triangulation** d'un polygone P , notée $\Delta_e(P)$, est une partition de l'intérieur P^i de P en triangles élémentaires.

Lemme 4.1. [6] *Tout polygone de réseau P simple ou quasi-simple possède au moins une triangulation $\Delta_e(P)$.* \square

De ce résultat on conclut également que tout polygone de réseau possède au moins une triangulation puisque chacune de ses faces en possède une.

Dans une triangulation $\Delta_e(P)$ d'un polygone P de réseau simple ou quasi-simple, tous les points du réseau sur le périmètre ∂P ou à l'intérieur P^i sont des sommets de triangles élémentaires. Ainsi le nombre de triangles élémentaires d'une triangulation

est constant. En particulier pour les polygones simples nous avons le prochain résultat.

Lemme 4.2. [6, 16] *Soit P un polygone simple de réseau avec B points frontières et I points intérieurs. Toute triangulation $\Delta_e(P)$ de P est telle que*

(i) *les triangles élémentaires ont $B + I$ sommets distincts;*

(ii) *le nombre N de triangles est donné par*

$$(4.1) \quad N = 2I + B - 2$$

(iii) *et le nombre E de côtés est donné par*

$$(4.2) \quad 2E = 3N + B. \quad \square$$

On montre alors aisément le résultat suivant sur les triangles élémentaires.

Lemme 4.3. [4, 6, 13] *L'aire d'un triangle élémentaire est $\frac{1}{2}$.* \square

La preuve du théorème de Pick qui suit est courte étant donné qu'elle découle des résultats précédents.

Théorème 4.4 (Théorème de Pick). *Soit P un polygone simple de réseau possédant I points intérieurs et B points frontières. Alors,*

$$(4.3) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Démonstration. En vertu du Lemme 4.2, P possède $(2I + B - 2)$ triangles élémentaires. Or le Lemme 4.3 assure que chaque triangle élémentaire a une aire de $\frac{1}{2}$. Le résultat suit. \square

Nous pouvons adapter ce résultat pour un polygone de réseau quasi-simple en tenant compte de la fréquence d'apparition des différents sommets et points frontières dans la définition de $\mathcal{V}(P)$ et ∂P , voir [7] pour plus de détails.

5. CARACTÉRISTIQUES D'EULER

On définit et calcule les **caractéristiques d'Euler** d'un polygone P et de son périmètre ∂P , que l'on note $\chi(P)$ et $\chi(\partial P)$, de la façon suivante

$$(5.1) \quad \chi(P) = V' - E' + F',$$

$$(5.2) \quad \chi(\partial P) = V'_{|\partial P} - E'_{|\partial P}$$

où V' , E' et F' sont respectivement le nombre de sommets, de côtés et de faces bornées (de triangles élémentaires) d'une triangulation $\Delta_e(P)$ de P , et $V'_{|\partial P}$ et $E'_{|\partial P}$ désignent le nombre de sommets et de côtés de la triangulation sur le périmètre ∂P de P . On inclut ici les sommets et les côtés sur les cloisons et les branches du polygone.

Lorsque l'objet est un polygone, il n'est pas nécessaire d'avoir une triangulation de l'objet pour en calculer la caractéristique d'Euler. Il suffit de la calculer à partir des sommets, côtés et faces distincts déjà présents donc, à partir du périmètre du polygone. C'est ce que nous assure la proposition suivante.

Théorème 5.1. *Soit P un polygone. Alors on peut calculer $\chi(P)$ et $\chi(\partial P)$ à partir des nombres de sommets V , côtés E et faces F du polygone P de la façon suivante*

$$(5.3) \quad \chi(P) = V - E + F,$$

$$(5.4) \quad \chi(\partial P) = V - E.$$

Démonstration. Partons d'une triangulation $\Delta_e(P)$ de P . Retirons les côtés situés à l'intérieur du polygone de telle sorte que l'ensemble des côtés et sommets reste connecté en tout instant au périmètre (il suffit de procéder à l'inverse de la procédure de triangulation). Deux cas se présentent. Utilisons l'indice zéro pour symboliser la situation initiale.

Cas 1. Les deux sommets (extrémités du côté) restent après la suppression du côté car au moins un autre côté s'y termine, on a alors supprimé une face, ainsi $V = V_0$, $E = E_0 - 1$ et $F = F_0 - 1$.

Cas 2. Un des deux sommets est éliminé par la suppression du côté et on n'a pas supprimé de face, alors $V = V_0 - 1$, $E = E_0 - 1$ et $F = F_0$.

Dans les deux cas, la valeur de $\chi(P) = V - E + F$ n'est pas modifiée. Il ne reste plus qu'à éliminer les sommets sur le périmètre du polygone. En les enlevant un par un, à chaque étape on a $V = V_0 - 1$, $E = E_0 - 1$ et $F = F_0$, de sorte que ni $\chi(P) = V - E + F$ ni $\chi(\partial P) = V - E$ ne s'en trouvent changés. On conclut que les valeurs des caractéristiques d'Euler d'un polygone ne dépendent pas de la triangulation de celui-ci mais seulement de la nature de son périmètre. \square

Théorème 5.2. *Soit P un polygone possédant T trous dans son périmètre. Alors,*

$$(5.5) \quad \chi(P) = 1 - T.$$

Démonstration. Construisons le polygone en ajoutant successivement un à un les côtés au périmètre et en calculant l'expression $R = 1 + E - V$. On établit que R représente le nombre de régions connexes bornées par le périmètre, les F faces et les T trous, de telle sorte que $R = F + T$ d'où $\chi(P) = V - E + F = 1 - T$.

Procédons par induction. Pour le premier côté, $E = 1$ et $V = 2$ de sorte que $R = 1 + E - V = 0$ et il n'y a aucune région connexe bornée de formée. Supposons le résultat vrai après avoir ajouté k côtés de façon à former un périmètre partiel connexe. En ajoutant un $(k + 1)^{\text{ième}}$ côté, deux situations se présentent.

Cas 1. On ajoute également un nouveau sommet et il n'y a pas de nouvelle région bornée de créée, ainsi E devient $E + 1$ et V devient $V + 1$ et R reste inchangé.

Cas 2. On n'ajoute pas de nouveau sommet, alors une nouvelle région connexe bornée est créée. Ainsi E devient $E + 1$ et V reste inchangé de telle sorte que R devient $R + 1$.

À la fin du procédé, R compte le nombre de régions connexes bornées par le périmètre, les F faces et les T trous. \square

6. AIRE D'UN POLYGONE DE RÉSEAU

Il existe une façon de modifier la formule de Pick pour trouver l'aire de polygones non simples en utilisant les caractéristiques d'Euler. Il faut toutefois tenir compte des côtés de la triangulation qui sont sur les branches et les cloisons du polygone.

Deux points frontières b_1 et b_2 déterminent un côté de toute triangulation sur le périmètre si et seulement si le côté $\bar{b}_1\bar{b}_2$ est inclus dans le périmètre ∂P de P et qu'il n'y a pas d'autre point frontière autre que b_1 et b_2 sur le côté $\bar{b}_1\bar{b}_2$.

Notons par $E_{\partial P}^i$ les côtés de la triangulation sur les branches et les cloisons adjacents à une ou deux faces intérieures et par $E_{\partial P}^e$ les côtés de la triangulation sur les branches et les cloisons adjacents à une ou deux faces extérieures. On peut alors adapter un résultat apparaissant dans [25].

Théorème 6.1. *Soit P un polygone de réseau possédant I points intérieurs et B points frontières, alors l'aire de P est obtenue par la formule*

$$(6.1) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{B}{2} - \chi(P) + \frac{\chi(\partial P)}{2} + \frac{1}{2}(E_{\partial P}^i - E_{\partial P}^e).$$

où $E_{\partial P}^i$ représente le nombre de côtés de toute triangulation sur les branches et cloisons internes et $E_{\partial P}^e$ représente le nombre de côtés de toute triangulation sur les branches et cloisons externes.

Démonstration. On construit une triangulation $P' = \Delta_e(P)$ de P . Ensuite, on crée le double D de P' en collant la frontière de P' à une copie d'elle-même et en gonflant l'intérieur. L'objet D est donc un étrange ballon avec des faces triangulaires. Soit V_I , E_I et F_I le nombre de sommets, de côtés et de faces de l'objet $I = P, P'$ ou D . Posons

$$(6.2) \quad \chi(D) = V_D - E_D + F_D,$$

alors

$$(6.3) \quad \chi(D) = (2V_{P'} - V|_{\partial P'}) - (2E_{P'} - E|_{\partial P'}) + 2F_{P'}$$

$$(6.4) \quad = 2(V_{P'} - E_{P'} + F_{P'}) - (V|_{\partial P'} - E|_{\partial P'})$$

$$(6.5) \quad = 2\chi(P') - \chi(\partial P')$$

$$(6.6) \quad = 2\chi(P) - \chi(\partial P).$$

On a les relations directes suivantes

$$(6.7) \quad F_D = 2F_{P'},$$

$$(6.8) \quad V_D = 2I + B,$$

et un décompte méticuleux nous donne

$$(6.9) \quad 3F_D = 2E_D + 2(E_{\partial P}^i - E_{\partial P}^e)$$

puisque les $E_{\partial P}^i$ côtés sont adjacents à 4 triangles de D et les $E_{\partial P}^e$ côtés ne sont adjacents à aucun des triangles de D . De (6.2) et (6.6), on tire

$$(6.10) \quad F_D = 2\chi(P) - \chi(\partial P) - V_D + E_D.$$

Puis, de (6.10), (6.8) et (6.9) on a

$$F_D = 2\chi(P) - \chi(\partial P) - (2I + B) + \frac{3}{2}F_D - (E_{\partial P}^i - E_{\partial P}^e),$$

d'où

$$(6.11) \quad \frac{F_D}{2} = 2I + B - 2\chi(P) + \chi(\partial P) + (E_{\partial P}^i - E_{\partial P}^e).$$

Comme

$$\text{Aire}(P) = \frac{F_{P'}}{2},$$

on obtient finalement le résultat avec (6.7) et (6.11). \square

Pour l'exemple de la Figure 2 on a $E_{\partial P}^i = 6$, $E_{\partial P}^e = 4$, $I = 1$, $B = 25$, $V = 15$, $E = 18$, $F = 2$ et $L = 0$ de sorte que $\chi(P) = -1$ et $\chi(\partial P) = -3$ et alors

$$\text{Aire}(P) = 1 + \frac{25}{2} - (-1) + \frac{(-3)}{2} + \frac{(6-4)}{2} = 14.$$

7. POLYGONE GÉNÉRALISÉ

On dit que plusieurs polygones dans le plan forment un *polygone généralisé* si

- (1) il n'y a aucune intersection (l'intersection de sommets est une intersection) entre polygones distincts, et
- (2) il existe un polygone, un *continent*, qui contient tous les autres polygones dans son intérieur (on nommera ces autres polygones des *enclaves*).

On définit alors le *périmètre* d'un polygone généralisé comme étant l'union des périmètres de tous les polygones le composant. L'intérieur du polygone généralisé est l'intersection de l'intérieur du continent avec les extérieurs des enclaves tandis que l'extérieur du polygone généralisé est l'union de l'extérieur du continent avec les intérieurs des enclaves.

Notons qu'un trou d'une enclave devient une face du polygone généralisé et une face d'une enclave devient un trou du polygone généralisé.

Plusieurs polygones généralisés dans le plan forment une *union de polygones généralisés* si chacun est situé dans l'extérieur des autres. Sa *région intérieure* et son *périmètre* sont l'union respectivement des régions intérieures et des périmètres de chacun des polygones généralisés la composant. On peut ainsi dire qu'une union de polygones généralisés permet la présence d'autres continents et d'enclaves. On appellera *île* un polygone généralisé dans un trou d'un autre polygone généralisé.

On définit l'*aire* d'un polygone généralisé P comme étant la somme des aires de ses régions intérieures de P , autrement dit c'est la surface de la terre ferme. De même l'aire d'une union de polygones généralisés est la somme des aires de chacun des polygones généralisés qui la composent.

On admet qu'il est possible d'obtenir une décomposition d'un polygone généralisé en triangles en adaptant la démonstration du Lemme 3.1 et ensuite d'obtenir une triangulation comme au Lemme 4.1.

8. CARACTÉRISTIQUES D'EULER REVISITÉES

Pour un polygone généralisé les formules (5.1) et (5.3) ne coïncident pas. Il est aisé de voir, qu'à partir d'une triangulation et en procédant selon la démonstration du Théorème 5.1, qu'à un moment donné on déconnectera les périmètres de deux polygones (un continent et un enclave ou bien deux enclaves d'une même face). Dans ce cas en enlevant une arête (E devient $E_0 - 1$), le nombre de sommets reste inchangé ($V = V_0$) ainsi que le nombre de faces ($F = F_0$), alors la valeur de $\chi(P)$ augmente de 1. Elle augmentera de 1 à chaque fois qu'on déconnectera une partie du périmètre en enlevant une arête. Pour remédier à cet effet et garder une valeur constante pour la caractéristique, on considère plutôt la caractéristique suivante

$$(8.1) \quad \widehat{\chi}(P) = V' - E' + \sum_{f=1}^{F'} (2 - C_f)$$

où C_f est le nombre de composantes connexes du périmètre de la face f . On conserve inchangée toutefois la caractéristique du périmètre en posant $\widehat{\chi}(\partial P) = \chi(\partial P)$. Notons que pour une triangulation on a $\widehat{\chi}(P) = \chi(P)$ car pour chaque

triangle $C_f = 1$ et ainsi

$$(8.2) \quad \sum_{f=1}^{F'} (2 - C_f) = \sum_{f=1}^{F'} (1) = F'.$$

Théorème 8.1. *Soit P un polygone généralisé. Alors on peut calculer $\widehat{\chi}(P)$ et $\widehat{\chi}(\partial P)$ à partir des nombres de sommets V , côtés E , régions intérieures F et enclaves L du polygone généralisé P de la façon suivante*

$$(8.3) \quad \widehat{\chi}(P) = V - E + F - L,$$

$$(8.4) \quad \widehat{\chi}(\partial P) = V - E.$$

Démonstration. Comme au Théorème 5.1, partons d'une triangulation de P et éliminons les arêtes et sommets situés à l'intérieur du polygone généralisé en ne déconnectant jamais le périmètre (de la triangulation). Ainsi (8.1) reste valide et à valeur constante car elle est essentiellement identique à (5.1) puisque dans ce cas $2 - C_f = 1$ pour chaque face. Ensuite, à chaque fois qu'on enlève une arête, le nombre de sommets V et le nombre de faces F restent inchangés et un enclave est créé. Ainsi la valeur de la caractéristique reste constante selon la formule (8.3). \square

On obtient l'équivalent du Théorème 5.2 pour $\widehat{\chi}(P)$.

Théorème 8.2. *Soit P un polygone généralisé constitué d'un continent ayant F_C faces et T_C trous et de L enclaves ayant chacune F_l faces et T_l trous ($l=1, \dots, L$). Alors les nombres de faces F_P et de trous T_P de P sont*

$$(8.5) \quad F_P = F_C + \sum_{l=1}^L T_l,$$

$$(8.6) \quad T_P = T_C + \sum_{l=1}^L F_l$$

et on a

$$(8.7) \quad \widehat{\chi}(P) = 1 - T_P.$$

Démonstration. On utilise (5.3) et (5.5) pour le continent et chacun des enclaves, ainsi on a

$$V_C - E_C + F_C = 1 - T_C,$$

et pour $l = 1, \dots, L$

$$V_l - E_l + F_l = 1 - T_l.$$

Mais

$$V_P = V_C + \sum_{l=1}^L V_l,$$

$$E_P = E_C + \sum_{l=1}^L E_l,$$

$$F_P = F_C + \sum_{l=1}^L T_l,$$

$$T_P = T_C + \sum_{l=1}^L F_l$$

d'où

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi}(P) &= V_P - E_P + F_P - L \\
&= (V_C + \sum_{l=1}^L V_l) - (E_C + \sum_{l=1}^L E_l) + (F_C + \sum_{l=1}^L T_l) - L \\
&= (V_C - E_C + F_C) + \sum_{l=1}^L (V_l - E_l + T_l) - L \\
&= (1 - T_C) + \sum_{l=1}^L (1 - F_l) - L \\
&= 1 - (T_C + \sum_{l=1}^L F_l) \\
&= 1 - T_P.
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

9. AIRE D'UN POLYGONE DE RÉSEAU GÉNÉRALISÉ

La formule (6.1) est également valide pour les polygones généralisés. Il suffit de constater qu'une cloison interne, respectivement externe, d'une enclave devient une cloison externe, respectivement interne, du polygone généralisé et, de même, une branche interne, respectivement externe, d'une enclave devient une branche externe, respectivement interne, du polygone généralisé.

Théorème 9.1. *Soit P un polygone généralisé de réseau. L'aire de P peut être calculée par la formule suivante*

$$(9.1) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{B}{2} - \widehat{\chi}(P) + \frac{\widehat{\chi}(\partial P)}{2} + \frac{1}{2}(E_{\partial P}^i - E_{\partial P}^e)$$

où I est le nombre de points intérieurs dans P , B est le nombre de points frontières sur le périmètre de P , $\widehat{\chi}(P)$ et $\widehat{\chi}(\partial P)$ sont calculés à partir de V , E , F et L , V étant le nombre de sommets des polygones composants P , E étant le nombre de côtés des polygones composants P , F étant le nombre de faces de P , L étant le nombre d'enclaves dans le continent de P . Aussi $E_{\partial P}^i$ et $E_{\partial P}^e$ sont les nombres de côtés de toute triangulation de P sur les cloisons et les branches internes et externes de P .

Démonstration. Pour $L = 0$, (9.1) est identique à (6.1). Supposons que c'est vrai pour un polygone généralisé P à L enclaves et montrons que c'est encore vrai si on

ajoute une $(L + 1)$ ^{ième} enclave Q pour former le polygone généralisé R . On a

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(R) &= \text{Aire}(P) - \text{Aire}(Q) \\
&= \left(I_P + \frac{B_P}{2} - \widehat{\chi}(P) + \frac{\widehat{\chi}(\partial P)}{2} + \frac{1}{2}(E_{\partial P}^i - E_{\partial P}^e) \right) \\
&\quad - \left(I_Q + \frac{B_Q}{2} - \widehat{\chi}(Q) + \frac{\widehat{\chi}(\partial Q)}{2} + \frac{1}{2}(E_{\partial Q}^i - E_{\partial Q}^e) \right) \\
&= (I_P - I_Q - B_Q) + \left(\frac{B_P}{2} + \frac{B_Q}{2} \right) \\
&\quad - \left(\frac{V_P}{2} - \frac{E_P}{2} + F_P - L \right) + \widehat{\chi}(Q) - \left(\frac{V_Q}{2} - \frac{E_Q}{2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(E_{\partial P}^i + E_{\partial Q}^e) - \frac{1}{2}(E_{\partial P}^e + E_{\partial Q}^i) \\
&= \left(I_R + \frac{B_R}{2} \right) - \left(\frac{V_P + V_Q}{2} - \frac{E_P + E_Q}{2} + F_P \right) + \widehat{\chi}(Q) + L \\
&\quad + \frac{1}{2}(E_{\partial P}^i + E_{\partial Q}^e) - \frac{1}{2}(E_{\partial P}^e + E_{\partial Q}^i) \\
&= \left(I_R + \frac{B_R}{2} \right) - \left(\frac{V_R}{2} - \frac{E_R}{2} + F_P \right) + \widehat{\chi}(Q) + L + \frac{1}{2}(E_{\partial R}^i - E_{\partial R}^e)
\end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned}
E_{\partial R}^i &= E_{\partial P}^i + E_{\partial Q}^e, \\
E_{\partial R}^e &= E_{\partial P}^e + E_{\partial Q}^i.
\end{aligned}$$

On sait que $\widehat{\chi}(Q) = 1 - T_Q$ et comme les trous d'une enclave deviennent des faces du polygone généralisé, le nombre de faces de R est $F_R = F_P + T_Q$. Alors

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(R) &= \left(I_R + \frac{B_R}{2} \right) - \left(\frac{V_R}{2} - \frac{E_R}{2} + F_P \right) + (1 - T_Q) + L + \frac{1}{2}(E_{\partial R}^i - E_{\partial R}^e) \\
&= I_R + \frac{B_R}{2} - \left(\frac{V_R}{2} - \frac{E_R}{2} + (F_P + T_Q) - (L + 1) \right) + \frac{1}{2}(E_{\partial R}^i - E_{\partial R}^e) \\
&= I_R + \frac{B_R}{2} - \widehat{\chi}(R) + \frac{\widehat{\chi}(\partial R)}{2} + \frac{1}{2}(E_{\partial R}^i - E_{\partial R}^e)
\end{aligned}$$

La formule est donc vérifiée pour $(L + 1)$ enclaves. Ce qui démontre le résultat dans tous les cas. \square

Pour le polygone de la Figure 7 nous avons $I = 61$, $B = 41$, avec $V = 22$, $E = 25$, $F = 4$, $L = 1$ de sorte que $\chi(P) = 0$ et $\chi(\partial P) = -3$ et aussi $E_{\partial P}^e = 6$ et $E_{\partial P}^i = 8$. Ainsi

$$\text{Aire} = 61 + \frac{41}{2} - 0 + \frac{(-3)}{2} + \frac{(8 - 6)}{2} = 81.$$

D'un point de vue géométrique, les branches et les cloisons peuvent être supprimées sans changer la valeur de l'aire du polygone. On montre directement que (9.1) est invariante à la suppression des côtés de $E_{\partial P}^i$ et $E_{\partial P}^e$.

Par exemple, pour une branche, à chaque fois qu'on enlève un côté alors V et E diminuent chacun de 1 et il n'y a pas de changement des nombres de faces F et de enclaves L de sorte que $\widehat{\chi}(P)$ et $\widehat{\chi}(\partial P)$ restent inchangées. Pour une branche externe $E_{\partial P}^e$ devient $E_{\partial P}^e - 1$, on enlève un point frontière, B devient $B - 1$. Pour

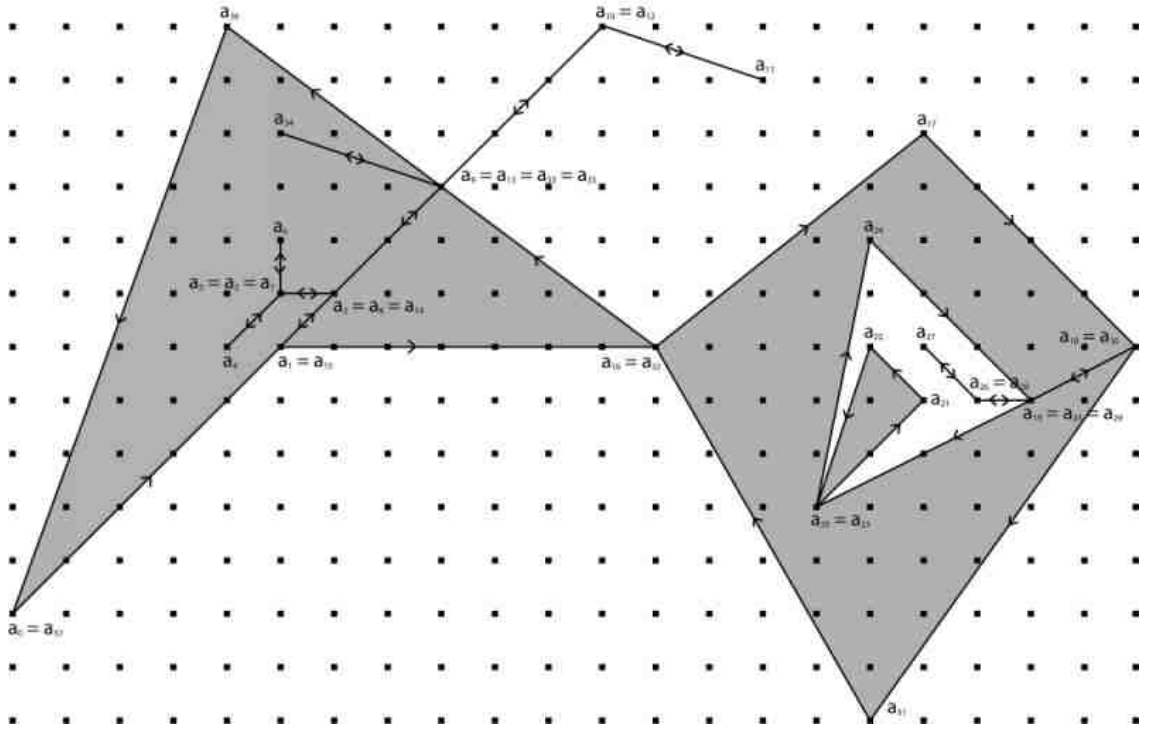


FIGURE 7. Un polygone.

une branche interne $E_{\partial P}^i$ devient $E_{\partial P}^i - 1$, B devient $B - 1$ et I devient $I + 1$. Ainsi, dans les deux cas, la valeur donnée par (9.1) ne change pas.

Pour une cloison, lorsqu'on enlève un côté, E devient $E - 1$, B , I et V restent inchangées. Si c'est une cloison interne: ou bien deux faces sont réunies en une et F devient $F - 1$ ou bien un enclave est créé et L devient $L + 1$. Dans les deux cas $\hat{\chi}(P)$ reste inchangée tandis que $\hat{\chi}(\partial P)$ augmente de 1. Aussi $E_{\partial P}^i$ devient $E_{\partial P}^i - 1$. Si c'est une cloison externe: ou bien deux trous sont réunies en un ou bien le périmètre est déconnecté et un continent ou une île est créé. Dans les deux cas $\hat{\chi}(P)$ et $\hat{\chi}(\partial P)$ augmentent de 1. Aussi $E_{\partial P}^e$ devient $E_{\partial P}^e - 1$. Ainsi, dans les deux cas, la valeur donnée par (9.1) ne change pas.

On termine en utilisant le fait que les parties restantes des cloisons deviennent des branches pour le polygone résultant.

Pour l'exemple de la Figure 2, après avoir supprimé les branches et les cloisons, nous obtenons le polygone de la Figure 8 avec $E_{\partial P}^i = 0$ et $E_{\partial P}^e = 0$. On a $I = 6$, $B = 17$, $V = 9$, $E = 10$, $F = 1$ et $L = 0$ de sorte que $\chi(P) = 0$ et $\chi(\partial P) = -1$ et

$$\text{Aire}(P) = 6 + \frac{17}{2} - 0 + \frac{(-1)}{2} + \frac{(0-0)}{2} = 14.$$

10. AIRE D'UNE UNION DE POLYGONES DE RÉSEAU GÉNÉRALISÉS

Notons que (9.1) peut être utilisée pour calculer l'aire des unions de polygones généralisés. Il suffira de faire la somme des enclaves dans chacun des continents et

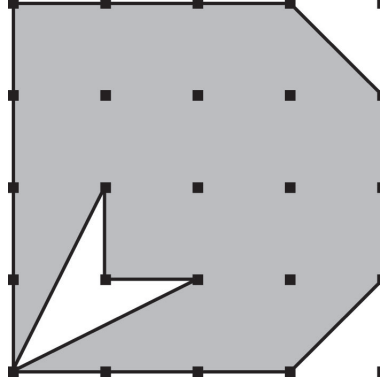


FIGURE 8. Le polygone de la Figure 2 sans cloison ni branche.

dans chacune des îles pour le paramètre L . La signification des autres paramètres est évidente.

Théorème 10.1. *Soit P une union de polygones généralisés de réseau. L'aire de P peut être calculée par la formule suivante*

$$(10.1) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{B}{2} - \widehat{\chi}(P) + \frac{\widehat{\chi}(\partial P)}{2} + \frac{1}{2}(E_{\partial P}^i - E_{\partial P}^e)$$

où I est le nombre de points intérieurs dans P , B est le nombre de points frontières sur le périmètre de P , $\widehat{\chi}(P)$ et $\widehat{\chi}(\partial P)$ sont calculés à partir de V , E , F et L , V étant le nombre de sommets des polygones composants P , E étant le nombre de côtés des polygones composants P , F étant le nombre de faces de P , L étant le nombre d'enclaves dans les continents et les îles de P . Aussi $E_{\partial P}^i$ et $E_{\partial P}^e$ sont les nombres de côtés de toute triangulation de P sur les cloisons et les branches internes et externes de P . \square

À la Figure 9 nous avons une union de polygones généralisés avec un continent, une île et deux enclaves (un dans le continent et l'autre dans l'île). On a $I = 11$, $B = 87$, $V = 35$, $E = 40$, $F = 5$ et $L = 2$, d'où

$$\widehat{\chi}(P) = 35 - 40 + 5 - 2 = -2 \quad \text{et} \quad \widehat{\chi}(\partial P) = 35 - 40 = -5.$$

Aussi $E_{\partial P}^i = 4$ et $E_{\partial P}^e = 4$, ainsi

$$\text{Aire}(P) = 11 + \frac{87}{2} - (-2) + \frac{(-5)}{2} + \frac{(4-4)}{2} = 54.$$

11. EXTRAPOLATION OU RÉSEAUX EMBOÎTÉS

Pour terminer nous présentons une méthode du calcul de l'aire introduite en [23] et qui s'apparente à la méthode d'extrapolation de Richardson. Elle est basée essentiellement sur le fait que les caractéristiques $\widehat{\chi}(P)$ et $\widehat{\chi}(\partial P)$ sont indépendantes du réseau. Ainsi en prenant les valeurs des paramètres I , B , $E_{\partial P}^i$ et $E_{\partial P}^e$ sur deux réseaux différents, par exemple en utilisant un second réseau plus fin que le premier, on a

$$\text{Aire}(P) = I_0 + \frac{B_0}{2} - \widehat{\chi}(P) + \frac{\widehat{\chi}(\partial P)}{2} + \frac{1}{2}(E_{\partial P,0}^i - E_{\partial P,0}^e)$$

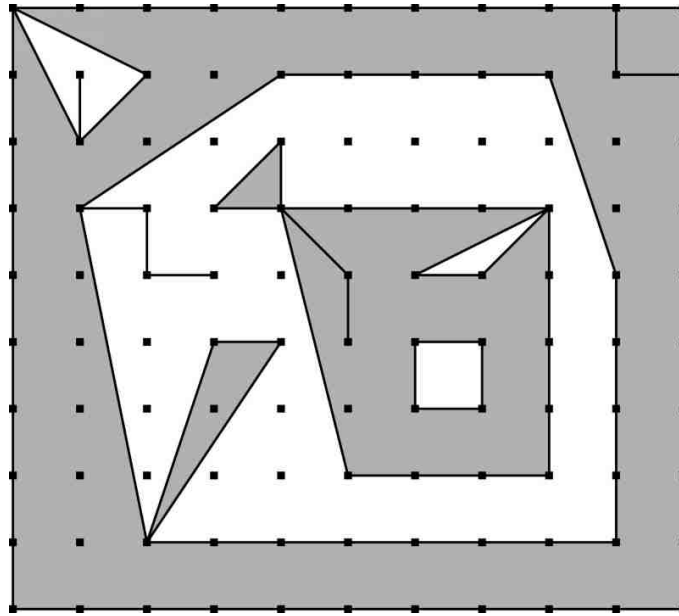


FIGURE 9. Union de polygones généralisés.

et

$$\text{Aire}(P) = \frac{1}{m^2} \left[I_m + \frac{B_m}{2} - \widehat{\chi}(P) + \frac{\widehat{\chi}(\partial P)}{2} + \frac{1}{2}(E_{\partial P, m}^i - E_{\partial P, m}^e) \right].$$

Nous en déduisons alors

$$\text{Aire}(P) = \frac{1}{m^2 - 1} \left[(I_m - I_0) + \frac{(B_m - B_0)}{2} + \frac{1}{2}(E_{\partial P, m}^i - E_{\partial P, 0}^i) - \frac{1}{2}(E_{\partial P, m}^e - E_{\partial P, 0}^e) \right].$$

Par exemple pour l'union de polygones généralisés de la Figure 9 en utilisant le réseau initial à la Figure 9 et le réseau plus fin ($m = 2$) de la Figure 10, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_0 &= 11 & \text{et} & & I_m &= 127, \\ B_0 &= 87 & \text{et} & & B_m &= 179, \\ E_{\partial P, 0}^i &= 4 & \text{et} & & E_{\partial P, m}^i &= 8, \\ E_{\partial P, 0}^e &= 4 & \text{et} & & E_{\partial P, m}^e &= 8, \end{aligned}$$

d'où

$$\text{Aire}(P) = \frac{1}{3} \left[(127 - 11) + \frac{(178 - 87)}{2} + \frac{1}{2}(8 - 4) - \frac{1}{2}(8 - 4) \right] = 54.$$

12. CONCLUSION

Nous avons démontré le théorème de Pick en étapes successives. Nous avons ensuite proposé une généralisation aux polygones généralisés en modifiant la caractéristique d'Euler d'un polygone.

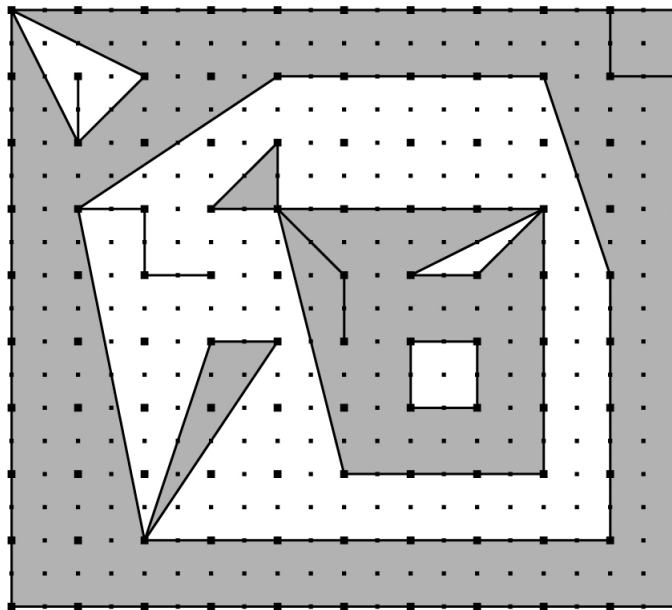


FIGURE 10. Union de polygones généralisés avec réseau plus fin.

13. REMERCIEMENTS

Ce travail a été rendu possible grâce au support financier provenant du CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada) via une subvention de recherche individuelle du premier auteur et une bourse de recherche de premier cycle du second auteur.

REFERENCES

- [1] C. Blatter, Another proof of Pick's area theorem, *Math. Mag.*, 70 (1997), 200.
- [2] W. E. Boykin, A middle school extension of Pick's theorem to areas of nonsimple closed polygonal regions, *School Science and Math.*, 95 (1995), 78-82.
- [3] H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*, Wiley, New York, 2e edition, 1969.
- [4] D. DeTemple, Pick's formula : a retrospective, *Mathematics Notes from Washington State University*, 32, no 3-4 (novembre 1989).
- [5] D. DeTemple et J. M. Robertson, The equivalence of Euler's and Pick's theorems, *Math. Teacher*, 67 (1974), 222-226.
- [6] F. Dubeau et S. Labbé, Sur le Théorème de Pick, *Annales des sciences mathématiques du Québec*, 2004, to appear.
- [7] F. Dubeau et S. Labbé, A general form of Pick's theorem, *Inter. J. of Pure and Applied Math.*, 18 (2005), 285-306.
- [8] W. W. Funkenbusch, From Euler's Formula to Pick's formula using an edge theorem, *Amer. Math. Monthly*, 81 (1974), 647-648.
- [9] R. W. Gaskell, M. S. Klamkin et P. Watson, Triangulations and Pick's theorem, *Math. Mag.*, 49 (1976), 35-37.
- [10] B. Grünbaum et G. C. Shephard, Pick's theorem, *Amer. Math. Monthly*, 100 (1993), 150-161.
- [11] H. Hadwiger et J. M. Wills, Neuere Studien über Gitterpolygone, *J. Math.*, 280 (1976), 61-69.
- [12] G. Haig, A 'natural' approach to Pick's theorem, *Math. Gaz.*, 64 (1980), 173-177.
- [13] R. Honsberger, *Ingenuity in Mathematics*, New Mathematical Library, volume 23, Math. Association of America, Washington, D.C., 1970.

- [14] K. Kolodziejczyk, Hadwiger-Wills-Type Higher-Dimensional Generalizations of Pick's Theorem, *Discrete Comput. Geom.*, 24 (2000), 355-364.
- [15] N. J. Lennes, Theorems on the Simple Finite Polygon and Polyhedron, *Amer. J. Math.*, 33 (1911), 37-62.
- [16] A. C. F. Liu, Lattice points and Pick's theorem, *Math. Mag.*, 52 (1979), 232-235.
- [17] I. Niven et H. S. Zuckerman, Lattice points and polygonal area, *Amer. Math. Monthly*, 74 (1967), 1195-1200.
- [18] J. O'Rourke, *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, New York, 1993.
- [19] G. Pick, Geometrisches zur Zahlenlehre, *Sitzungber. Lotos* (Prague), 19 (1899), 311-319.
- [20] C. Polis, Pick's theorem extended and generalized, *Math. Teacher*, 84 (1991), 399-401.
- [21] H. W. Pullman, An Elementary Proof of Pick's Theorem, *School Science and Mathematics* (1979), 7-12.
- [22] J. E. Reeve, A further note on the volume of lattice polyhedra, *J. London Math. Soc.*, 34 (1959), 57-62.
- [23] J. E. Reeve, On the volume of lattice polyhedra, *Proc. London Math. Soc.*, 7 (1957), 378-395.
- [24] D. Ren et J. R. Reay, The boundary characteristic and Pick's theorem in the Archimedean planar tilings, *J. Combinat. Theory A*, 44 (1987), 110-119.
- [25] I. Rosenholtz, Calculating surface areas from a blueprint, *Math. Mag.*, 52 (1979), 252-256.
- [26] P. R. Scott, The fascination of the elementary, *Amer. Math. Monthly*, 94 (1987), 759-768.
- [27] R. Skevington, Extending Pic's theorem, *Math. Gaz.*, 74 (1990), 136-138.
- [28] H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots*, Oxford University Press, New York, 1969.
- [29] H. Steinhaus, *Mathématiques en instantanés*, Flammarion, Paris, 1964.
- [30] I. Stewart, Combien de chèvre dans le verger ?, *Pour la science*, 149 (1990), 108-113.
- [31] D. E. Varbeg, Pick's theorem revisited, *Amer. Math. Monthly*, 92 (1985), 584-587.