S. Labbé
14 oct 2016

Mathematical Foundations of Automata Theory

Chapter 4

Rappels des Chapitre 1 à 3

I Algebraic preliminaries

II Semigroup and beyond

1.1. Semigroupe = ensemble + op. bin. asso.

monoide = ———— " ———— + el. neutre

notation si S est un semigroupe, alors $S^1 = \begin{cases} S & \text{si } S \text{ est un monoide} \\ S \cup \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$

3.7 Def Une congruence de semigroupe S est une relation d'équiv. $\sim$ t.q.

$$(\forall s,t \in S)(\forall u,v \in S^1) \quad s \sim t \Rightarrow usv \sim utv$$

donne un morphisme de semigroupe $S \longrightarrow S/\sim$

Def S semigroupe. $P \subseteq S$. La congruence syntactique de P sur S notée $s \sim_P t$ définie par

$$(\forall s,t \in S)\ (\forall x,y \in S^1) \quad xsy \in P \Leftrightarrow xty \in P$$

Le semigroupe quotient $S/\sim_P$ est appelé semigroupe syntactique de P dans S.

III A alphabet fini, A^* monoide libre, $L \subseteq A^*$ langage

Def L'ens. des langages rationnels de A^*, noté $Rat(A^*)$, est le + petit ens $F \subseteq \mathcal{P}(A^*)$ qui satisfait

- $\{\} \in F$, $\{a\} \in F$ $\forall a \in A$
- F est stable par union fini, produit, étoile

Def Language $L \subseteq A^*$ est reconnaissable s'$\exists$ automate fini $\mathcal{A}$ tel que $L = L(\mathcal{A})$.

Prop L'union, l'intersection, le complément, le produit, l'étoile, le quotient, l'image inverse par morphisme de langages reconnaissables est reconnaissable. [Prop 4.8, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.15, 4.16]

Thm (Kleene) Un langage est reconnaissable $\Leftrightarrow$ il est rationnel.

IV Ensembles reconnaissables et rationnels

On remplace le monoïde libre par un monoïde arbitraire.

$\Rightarrow$ Le théorème de Kleene ne s'applique plus !

1. Sous/ens rationnels d'un monoïde

__Def__ L'ens des __s/ens rationnels__ d'un monoïde M est le + petit ens $F \subseteq \mathcal{P}(M)$, t.q.

- $\{\} \in F$, $\{m\} \in F \quad \forall m \in M$
- F est stable pour l'union, produit, l'étoile.

$\boxed{\text{Prop. 1.1}}$ $\varphi : M \to N$ morphisme de monoïde. Si $R \subseteq M$ rationnel, alors $\varphi(R)$ est s/ens rationnel de N.

__Preuve__ Soit F l'ens. des s/ens K de M t.q. $\varphi(K)$ est s/ens rationnel de N.

- F contient les ens. fini
- F fermé pour l'union, produit, l'étoile à cause des formules

$$\varphi(K+K') = \varphi(K)+\varphi(K'),\quad \varphi(KK') = \varphi(K)\varphi(K'),\quad \varphi(K^*) = (\varphi(K))^*$$

Donc F contient les s/ens rationnels de M. $\square$

__Attention__ les s/ens rationnels de monoïdes ne sont pas stables pour l'intersection !

$\boxed{\text{EX 1.3}}$ $M = a^* \times \{b,c\}^*$.

$$R = (a,b)^*(1,c)^* = \{(a^n, b^n c^m) \mid n,m \geq 0\}$$
$$S = (1,b)^*(a,c)^* = \{(a^n, b^m c^n) \mid n,m \geq 0\}$$

sont des s/ens rat. de M, mais

$$R \cap S = \{(a^n, b^n c^n) \mid n \geq 0\}.$$

Soit $\pi : M \to \{b,c\}^*$. Si $R \cap S$ rationnel, alors Prop 1.1 $\Rightarrow$

$$\pi(R \cap S) = \{b^n c^n \mid n \geq 0\} \text{ rationnel.} \quad ↯$$

$\boxed{\text{Prop 1.3}}$ Tout s/ens rat. d'un monoïde M est un s/ens rat. d'un s/monoïde finiment engendré de M.

__Preuve__ Soit $\mathcal{R}$ = ens des $R \subseteq M$ qui sont des s/ens rat. d'un s/monoïde finiment engendré de M.

$\emptyset \in \mathcal{R}$, $\{m\}$ singletons $\in \mathcal{R}$, car m^* finiment engendré

$R, S \in \mathcal{R} \Rightarrow \exists\, F, G$ fini $\begin{matrix} R \text{ s/ens rat de } F^* \\ S \text{ —''— } G^* \end{matrix}$ $\Rightarrow RS$ et $R+S$ s/ens rat. de $(F+G)^*$

$\Rightarrow R^*$ s/ens rat de F^*

$\Rightarrow RS, R+S, R^* \in \mathcal{R}$ $\square$

2. S/ens reconnaissables d'un monoïde

Habituellement : automates ⇝ langages reconnaissables

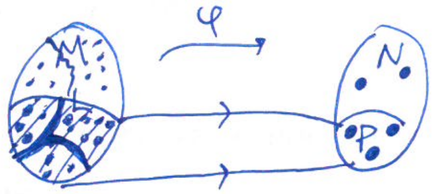
pt. vue algorithmique = bien, mais notion asymétrique (?)

Mieux : définition + abstraite basée sur les monoïdes (pas nécessairement libres)

2.1 Reconnaissance par morphismes de monoïdes

$\varphi : M \to N$ morphisme de monoïde

$L \subseteq M$ est reconnu par φ si $\exists\, P \subseteq N$ t.q. $L = \varphi^{-1}(P)$



pleinement reconnu si φ ~~est~~ surjectif.

Def Une congruence $\sim$ sur M sature un s/ens L de M
si $u \in L$ et $u \sim v \Rightarrow v \in L$

Prop 2.5 LCSSE

(1) L est reconnu par φ

(2) L est saturé par $\sim_\varphi$

(3) $\varphi^{-1}(\varphi(L)) = L$

Preuve (1) ⇒ (2) : voir dessin. (2) ⇒ (3) contraposée ou preuve directe

$L \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(L))$ est trivial. Soit $x \in \varphi^{-1}(\varphi(L)) \Rightarrow \exists\, y \in L$ t.q. $\varphi(y) = \varphi(x)$

$\sim_\varphi$ saturé $\Rightarrow x \in L$. (3) ⇒ (1) Poser $P = \varphi(L)$. □

Def Un monoïde N reconnaît [pleinement] L ~~de M~~
si $\exists$ morphisme de monoïde $\varphi : M \to N$ qui reconnaît L.

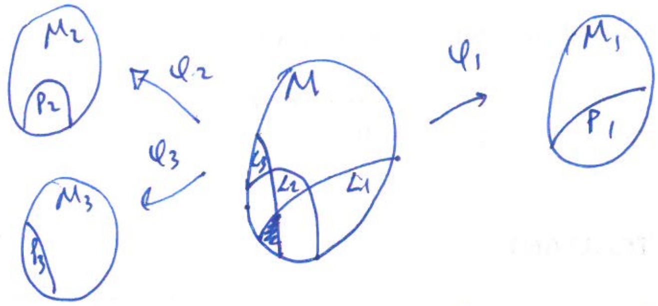
2.2 Opérations sur les ens. (~~complém~~, ~~tutes~~, ~~∅~~, L^c, $L \cap K$, $L \cup K$, $\varphi^{-1}(L)$, $K^{-1}L$, LK^{-1})

produit = ? = oublié ?

Prop. 2.9 Soit $L_1, \dots, L_n \subseteq M$. Si chaque L_i est reconnu par φ_i,
alors $\bigcap_{1 \le i \le n} L_i$ et $\bigcup_{1 \le i \le n}$ sont reconnus par le ~~produit~~
morphisme produit φ des φ_i :

$$\varphi : M \to \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$$
$$x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

Preuve Sp. $L_i = \varphi_i^{-1}(P_i)$, $P_i \subseteq M_i$, $\forall i$.



On a $$\bigcap_{1\le i\le n} L_i = \bigcap_{1\le i\le n} \varphi_i^{-1}(P_i) = \varphi^{-1}(P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n)$$

et $$\bigcup_{1\le i\le n} L_i = \varphi^{-1}\Big(\bigcup_{1\le i\le n} M_1 \times \dots \times M_{i-1} \times P_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_n\Big) \quad \square$$

$\boxed{\text{Ex } 2.1}$ $\varphi : (\mathbb{N}, +) \longrightarrow (T, \oplus)$ $\quad T = \{1, 2, 3\}$

$x \oplus y = \min\{x+y, 2\}$

$0 \longmapsto 0$

$1 \longmapsto 1$

$n \longmapsto 2, \ n \geq 2$

les s/ens de $\mathbb{N}$ reconnus par φ sont

$\mathbb{N} = \varphi^{-1}(T)$

$\{0,1\} = \varphi^{-1}(\{0,1\})$ $\quad \{0,2,3,4 \dots\} = \varphi^{-1}(\{0,2\})$ $\quad \{1,2,3,4 \dots\} = \varphi^{-1}(\{1,2\})$

$\{0\} = \varphi^{-1}(0)$ $\quad \{1\} = \varphi^{-1}(1)$ $\quad \{2,3,4 \dots\} = \varphi^{-1}(2)$

$\{\ \} = \varphi^{-1}(\{\})$

2.3 Ensembles reconnaissables

~~$L \subseteq M$ monoïde est~~

L s/ens d'un monoïde est reconnaissable s'il est reconnu par un monoïde fini.

$$\mathrm{Rec}(M) = \{ \text{s/ens rec. de } M \}$$

Thm 2.13 (McKnight) M monoïde, LCSSE

(1) M est finiment engendré

(2) tout s/ens rec. de M est rationnel

(3) M est un s/ens rationnel de M

Preuve (1) $\Rightarrow$ (2) $\exists$ alphabet fini A et morphisme surjectif $\pi : A^* \to M$.
Soit R s/ens rec. de M. Cor 2.12 $\Rightarrow$ $\pi^{-1}(R)$ reconnaissable dans A^*.
Thm Kleene $\Rightarrow$ $\pi^{-1}(R)$ est rationnel. Or $R = \pi(\pi^{-1}(R))$. Prop 1.1 $\Rightarrow$ R rationnel.

(2) $\Rightarrow$ (3) car M est s/ens rec de M.

(3) $\Rightarrow$ (1) conséquence de la Prop 1.3. $\square$

3. Lien avec les automates

monoïde libre A^*, automate $\mapsto$ monoïde

3.1 Monoïde de transition d'un automate déterministe

$\mathcal{A} = (Q, A, \cdot, q_-, F)$

q_- ↳ état initial

$\cdot : Q \times A \to Q$ fct partielle appelée fct de transition

$(q, a) \mapsto q \cdot a$

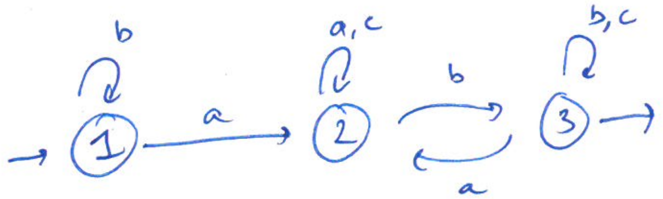
Soit morphisme de monoïde

$$\mu : A^* \longrightarrow \mathcal{F}(Q) = \{ \text{partial transformations on } Q \}$$

$$u \longmapsto (q \mapsto q \cdot u)$$

L'image $\mu(A^*)$ est un monoïde appelé monoïde de transformation de $\mathcal{A}$.
ou monoïde de transition
noté $M(\mathcal{A})$

$\boxed{\text{EX}}$



Algo

Pour ch. mot w
→ Peut-on réduire ?
→ Calcule
→ Si nouveau
ajout table
sinon
ajout règle réécriture

	1	2	3
1	1	2	3
a	2	2	2
b	1	3	3
c	-	2	3
ab	3	3	3
bc	-	3	3
ca	-	2	2

} él. neutre

} générateurs

Règle réécritures

$aa \to a$
$ac \to a$
$ba \to a$
$bb \to b$
$cb \to bc$
$cc \to c$
$abc \to ab$
$bca \to ca$
$cab \to bc$

Présentation de ce mon. de tr. $= \langle \{a, b, c\} \mid aa = a,\ ac = a,\ ba = a,\ bb = b,\ cb = bc,\ cc = c,\ abc = ab,\ bca = ca,\ cab = bc \rangle$

$M(\mathcal{A})$ peut être représenté comme un monoïde de matrices booléennes $|Q| \times |Q|$.

$$\mu(u)_{p,q} = \begin{cases} 1, & \text{s'}\exists \text{ chemin } p \xrightarrow{u} q \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$\boxed{\text{EX}}$

$$\mu(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Monoïdes vs automates

Prop 3.18 Si un automate fini reconnaît un langage L, alors son monoïde de transition reconnaît L.

Preuve Soit $\mathcal{A}$ automate fini t.q. $L = L(\mathcal{A})$.

Soit $\mu : A^* \to M(\mathcal{A})$

On observe que $u \in L \iff \mu(u)_{p,q} = 1$ où $p \in Q$ initial, $q \in Q$ final.

Donc $L = \mu^{-1}(P)$ où

$$P = \left\{ m \in M(\mathcal{A}) \;\middle|\; m_{p,q} = 1 \quad \text{où } \begin{matrix} p \text{ état initial} \\ q \text{ état final} \end{matrix} \right\}.$$

$\Rightarrow$ μ reconnaît L. $\square$

Thm 3.20 L langage. LCSSE

(1) L reconnu par automate fini déterministe.

(2) —————— " ——————.

(3) —————— " —— monoïde fini.

Preuve (1) $\Rightarrow$ (2) trivial.

(2) $\Rightarrow$ (3) Prop 3.18.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Soit $L \subseteq A^*$ langage reconnu par un monoïde fini M.

Alors $\exists\ \varphi : A^* \to M$ et $P \subseteq M$ t.q. $L = \varphi^{-1}(P)$.

Def Automate $\mathcal{A} = (M, A, \cdot, 1, P)$

avec $\cdot : M \times A \to M$
$(s, a) \mapsto s\,\varphi(a)$

$u \in L(\mathcal{A}) \iff 1 \cdot u \in P \iff \varphi(u) \in P \iff u \in \varphi^{-1}(P) = L.$

Donc $\mathcal{A}$ reconnaît langage L. $\square$

4. Monoïde syntaxique

4.1 Définition (généralisation de l'automate minimal)

M monoïde, $L \subseteq M$

La congruence syntaxique de L dans M est la relation $\sim_L$ définie dans M par $u \sim_L v \iff \forall x, y \in M$

$$xuy \in L \iff xvy \in L$$

Le quotient $M/_{\sim_L}$ est le monoïde syntaxique de L

Le morphisme naturel $\eta_L : M \to M/_{\sim_L}$ est le morphisme syntaxique de L

L'image $\eta_L(L)$ est l'image syntaxique de L.

[...]

Prop 4.27 Le monoïde syntaxique d'un langage reconnaissable est égal au monoïde de transition de son automate minimal.