Exercices du Chapitre 7 : Calcul différentiel et intégral (partie 2)

Pour les exercices suivants, il sera nécessaire d'importer les fonctions et symboles suivants :

```
from sympy import integrate,diff,pi,oo,cos,sin,log,dsolve
from sympy.abc import x,y,z,f,a,theta,rho
```

Exercice 1. Est-ce que la pente de la fonction $\sin(\sin(\sin(x)))$ au point $x = \frac{\pi}{5}$ est plus grande que $\frac{1}{2}$?

Solution : Oui

Exercice 2. Calculer la dérivée de $x \mapsto \log(x^3 + ax^2 + 1)$ où a est un paramètre réel.

Solution :

$$\frac{2ax + 3x^2}{ax^2 + x^3 + 1}$$

Exercice 3. Calculer les primitives de $x \mapsto \cos^3 x$ et $x \mapsto \log(x^2 + 1)$.

Solution :

$$-\frac{1}{3}\sin^3(x) + \sin(x) \text{ et } x\log\left(x^2+1\right) - 2x + 2\operatorname{atan}(x)$$

Exercice 4. Évaluer l'intégrale $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

Solution : 1

Exercice 5. Évaluer l'intégrale double

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta^2} \theta\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Solution : $\frac{16\pi^6}{3}$

Exercice 6. Calculer l'aire de la région $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 6x + 3 < y < 11 - x^2\}$.

Solution : 530/3

Exercice 7. Calculer le volume de la région

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y)^2 < z < 5x^2 + 6xy + 3y^2, 0 < x < 10, 0 < y < 12\}.$$

Solution : 41920

Exercice 8. Calculer le développement en série d'ordre 6 de

$$\frac{1}{1-2x}, \qquad (1+x)^a \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin(x)}{1+x}$$

en 0 pour les deux premières et en $\pi/2$ pour la troisième.

Solution :

- $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right)$

- $1+x^2\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}\right)+x^3\left(\frac{a^3}{6}-\frac{a^2}{2}+\frac{a}{3}\right)+x^4\left(\frac{a^4}{24}-\frac{a^3}{4}+\frac{11a^2}{24}-\frac{a}{4}\right)+$
  $x^5\left(\frac{a^5}{120}-\frac{a^4}{12}+\frac{7a^3}{24}-\frac{5a^2}{12}+\frac{a}{5}\right)+ax+\mathcal{O}\left(x^6\right)$
- $\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}-\frac{x-\frac{\pi}{2}}{1+\frac{\pi^2}{4}+\pi}+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2+\pi}+\frac{1}{1+\frac{\pi^3}{8}+\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi^2}{4}}\right)+$
  $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\left(-\frac{1}{1+\frac{\pi^4}{16}+2\pi+\frac{3\pi^2}{2}+\frac{\pi^3}{2}}+\frac{1}{2+\frac{\pi^2}{2}+2\pi}\right)+$
  $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\left(-\frac{1}{2+\frac{\pi^3}{4}+3\pi+\frac{3\pi^2}{2}}+\frac{1}{1+\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi^5}{32}+\frac{5\pi^2}{2}+\frac{5\pi^4}{16}+\frac{5\pi^3}{4}}+\frac{1}{24+12\pi}\right)+$
  $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5\left(-\frac{1}{24+6\pi^2+24\pi}-\frac{1}{1+3\pi+\frac{\pi^6}{64}+\frac{15\pi^2}{4}+\frac{3\pi^5}{16}+\frac{5\pi^3}{2}+\frac{15\pi^4}{16}}+\frac{1}{2+\frac{\pi^4}{8}+4\pi+3\pi^2+\pi^3}\right)+\mathcal{O}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6;x\to\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 9. Décrire l'ensemble des fonctions $f(x)$ dont la dérivée d'ordre trois par rapport à x est égale à elle-même.

Solution :

$$f(x)=C_3e^x+\frac{1}{\sqrt{e^x}}\left(C_1\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$$

Exercice 10. Résoudre les équations différentielles suivantes pour $u(x)$:

(1) $D^2u+2Du+u=xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

(2) $x^3D^2u-x^2Du-3xu+16\ln(x)=0$ sur $]0,+\infty[$.

(3) $3xDu=(1+x\sin(x)-3u^3\sin(x))u$ sur $]0,+\infty[$

(4) $x^2D^2u+Du=0$ sur $]0;+\infty[$

Solution :

(1) $u(x)=\left(C_1+C_2x+\frac{x^3}{6}\right)e^{-x}$

(2) $u(x)=\frac{1}{x}\left(C_1+C_2x^4+2\log^2(x)+\log(x)\right)$

(3) $u(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}\left(C_1+3e^{-\cos(x)}\right)e^{\cos(x)}}}$

(4) $u(x)=C_1-C_2xe^{\frac{1}{x}}+C_2\operatorname{Ei}\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercices du Chapitre 8 : Algèbre linéaire

Pour les exercices suivants, il sera nécessaire d'importer les fonctions et symboles suivants :

```
from sympy import Matrix,randMatrix,simplify,I
from sympy.abc import m
```

Exercice 11. En utilisant `randMatrix`, construire deux matrices carrées A et B dont les coefficients sont choisis aléatoirement. Vérifier que $A+B=B+A$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ et (très probablement) $AB\neq BA$.

Exercice 12. Soit la matrice

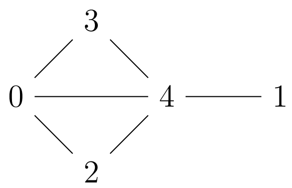
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}$$

Calculer M^9 et le déterminant de M. Sans utiliser l'ordinateur, en déduire que $M^8 = I$ et $M^{-1} = M^7$ et deviner ce que vaut M^{2015}. Vérifier ensuite les résultats avec l'ordinateur.

Solution : $M^9 = M$ et

$$M^{2015} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}i}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}i}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

Exercice 13. Dans le graphe ci-bas, entre le sommet 0 et le sommet 4, il y a un chemin de longueur 1 ($0 \to 4$), deux chemins de longueur 2 ($0 \to 3 \to 4$, $0 \to 2 \to 4$) et six chemins de longeurs 3 ($0 \to 2 \to 0 \to 4$, $0 \to 3 \to 0 \to 4$, $0 \to 4 \to 0 \to 4$, $0 \to 4 \to 1 \to 4$, $0 \to 4 \to 2 \to 4$, $0 \to 4 \to 3 \to 4$). Calculer le nombre de chemins de longueur L du sommet 0 au sommet 4 pour toutes les valeurs de $L \in \{4, 5, 6, 50\}$.



Solution : 16, 42, 116 et 862991471609926852608.

Exercice 14. En calculant la forme échelonnée réduite[1] d'une matrice, résoudre les systèmes d'équations linéaires $AX = B$ suivants :

$$A = \begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 4\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}; \qquad A = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 5\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1\\ -8\\ 1\end{bmatrix}.$$

Solution : Pour le premier système, $x = 1, y = -7/5, z = -4/5$. Pour le deuxième système, $x = -1 - z$, $y = 2 + z$ et $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. Résoudre le système linéaire $AX = B$ suivant à un paramètre m. On pourra distinguer plusieurs cas selon les valeurs de m.

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & m\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & m & -1\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}m\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Solution : Si $m \neq \pm 1$ alors $x = m - \frac{-m+1}{m-1} - \frac{1}{-m-1}(-m+1)\left(m - \frac{-m-1}{m-1}\right) y = 0, z = \frac{-m+1}{-m-1}$. Si $m = 1$ alors $x + y = 1$, $y \in \mathbb{R}$ et $z = 0$. Si $m = -1$ alors $x = z$, $y = 0$ et $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 16. Dire si les familles de vecteurs ci-bas sont linéairement indépendants :

$$\left\{\begin{pmatrix}5\\ 3\\ -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\right\}, \qquad \left\{\begin{pmatrix}5\\ 3\\ -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\ 1\\ 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\ -11\\ 22\end{pmatrix}\right\}.$$

1. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_échelonnée`

Solution : La première est linéairement indépendante et pas la deuxième.

Exercice 17. Calculer le volume du paralépipède de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets sont :

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}45\\79\\89\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}74\\26\\39\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}70\\71\\91\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}119\\105\\128\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}115\\150\\180\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}144\\97\\130\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}189\\176\\219\end{pmatrix}.$$

Solution : 28825

Exercice 18. Soit la matrice M et le vecteur v suivants :

$$M = \begin{bmatrix}10 & \frac{7}{3} & -7\\ 9 & 10 & -9\\ 3 & \frac{7}{3} & 0\end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}.$$

Calculer Mv. Déduire la propriété de ce vecteur. Trouver tous les vecteurs possédant la même propriété.

Solution : Vecteur propre