Exercices du Chapitre 5 : Résolution d'équations (partie 2)

Pour les exercices suivants, il sera nécessaire d'importer les fonctions et symboles suivants :

```
from sympy import solve, roots, symbols
from sympy.abc import a,b,x,y
```

Exercice 1. Trouver l'équation de la droite $y = ax+b$ qui passe par les points (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Solution : $y = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x + \frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$

Exercice 2. Trouver l'équation de la parabole $y = ax^2+bx+c$ qui passe par les points $(2, 54)$, $(5, -63)$ et $(8, 72)$.

Solution : $y = 14x^2 - 137x + 272$

Exercice 3. Calculer les points communs à la droite $y = 4x + 3$ et le cercle de rayon 5 centré à l'origine.

Solution : $\left[\left(-\frac{12}{17} + \frac{4\sqrt{26}}{17}, \quad \frac{3}{17} + \frac{16\sqrt{26}}{17}\right), \quad \left(-\frac{4\sqrt{26}}{17} - \frac{12}{17}, \quad -\frac{16\sqrt{26}}{17} + \frac{3}{17}\right)\right]$

Exercice 4. Calculer les points d'intersection des ellipses dont les équations sont $x^2+9y^2 = 25$ et $y^2 + 4\,(x-1)^2 = 36$.

Solution : $\left[\left(\frac{36}{35} + \frac{\sqrt{10501}}{35}, \quad -\frac{2}{35}\sqrt{-2\sqrt{10501} + 523}\right), \quad \left(\frac{36}{35} + \frac{\sqrt{10501}}{35}, \quad \frac{2}{35}\sqrt{-2\sqrt{10501} + 523}\right), \left(-\frac{\sqrt{10501}}{35} + \frac{36}{35}, \quad -\frac{2}{35}\sqrt{2\sqrt{10501} + 523}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{10501}}{35} + \frac{36}{35}, \quad \frac{2}{35}\sqrt{2\sqrt{10501} + 523}\right)\right]$

Exercice 5. Calculer les points d'intersection de la parabole $y = x^2$ et le cercle unité centré à l'origine.

Solution : $\left[\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{-2\sqrt{5} - 2}, \quad -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)\right]$

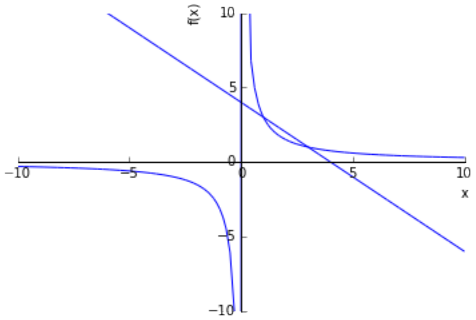
Exercices du Chapitre 6 : Tracer une fonction

Pour les exercices suivants, il sera nécessaire d'importer les fonctions et symboles suivants :

```
from sympy import sin,cos,Eq,plot,plot_implicit,And,mpmath
from sympy.abc import x,y,u,v,theta
from sympy.plotting import plot3d,plot_parametric
from sympy.plotting import plot3d_parametric_line,plot3d_parametric_surface
```

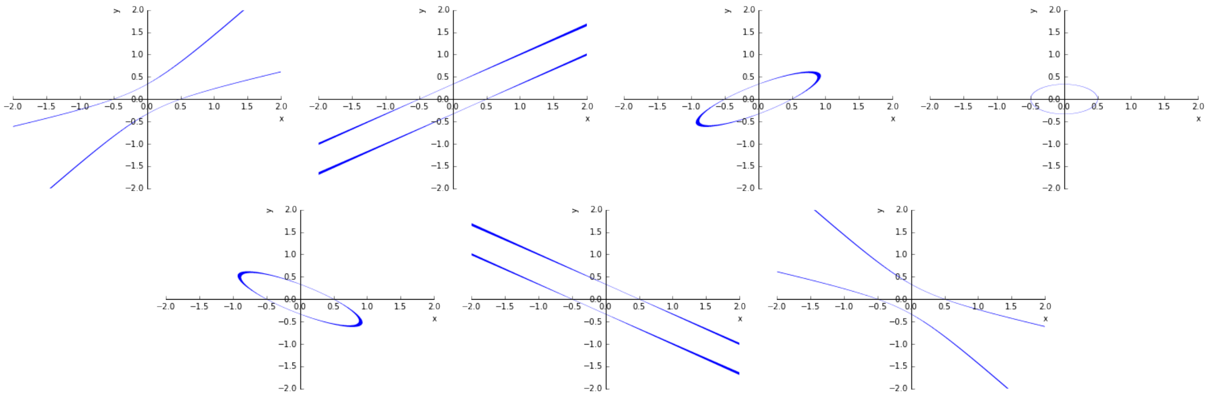
Exercice 6. Tracer les courbes d'équation $x + y = 4$, $xy = 3$ après avoir isolé la variable y. Est-ce que les points d'intersection, s'il y en a, correspondent bien aux solutions obtenues par la commande `solve` ?

Solution : cf. Exercice 18 de la séance précédente.



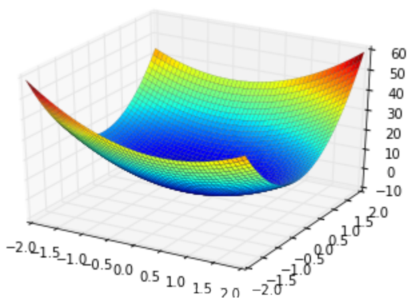
Exercice 7. Tracer les courbes d'équation $4x^2 + Bxy + 9y^2 = 1$ pour différentes valeurs de B telles que $-10 \leq B \leq 10$. En déduire pour quelles valeurs de B est-ce que l'équation décrit une ellipse.

Solution : On a une ellipse pour n $-12 \leq B \leq 12$. Ci-dessous les courbes pour des valeurs de B dans $\{-15, -12, -10, 0, 10, 12, 15\}$



Exercice 8. Tracer en 3D la fonction $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 9y^2 = 1$ sur un intervalle de valeurs de x et de y de votre choix.

Solution :



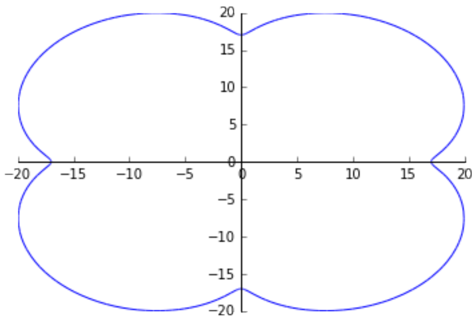
Exercice 9. Une épitrochoïde[1] est décrite par les équations paramétriques suivantes :

$$x = (R + r)\cos\theta - d\cos\left(\frac{R + r}{r}\theta\right),$$
$$y = (R + r)\sin\theta - d\sin\left(\frac{R + r}{r}\theta\right).$$

Tracer l'épitrochoïde lorsque $r = 4$, $R = 16$ et $d = 3$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. Voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Épitrochoïde`

Solution :



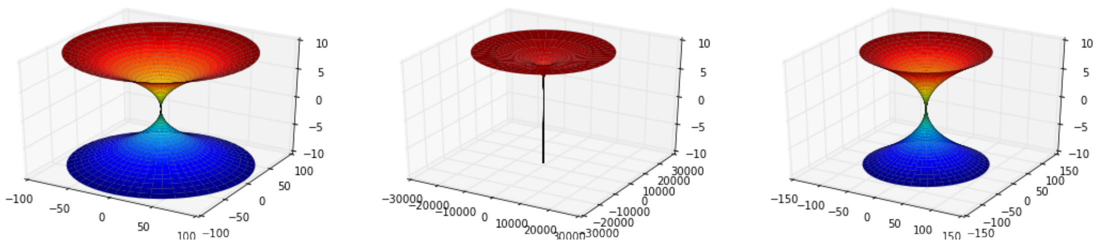
Exercice 10. Tracer une courbe de votre choix parmi celles de la page `https://en.wikipedia.org/wiki/Gallery_of_curves`

Exercice 11. La surface de révolution de la fonction $f(z)$ pour $z \in [a,b]$ autour de l'axe des z est :

$$x(u,\theta) = f(u)\cos\theta, \quad y(u,\theta) = f(u)\sin\theta, \quad z(u,\theta) = u$$

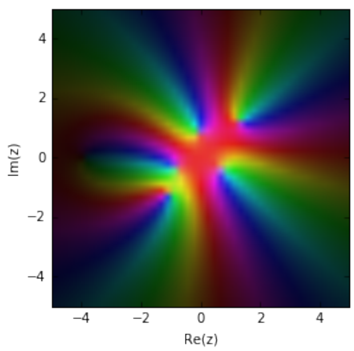
où $a \le u \le b$ et $0 \le \theta < 2\pi$. Tracer la surface de révolution de $f(z) = z^2$, $f(z) = e^z$ et $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ pour $z \in [-10, 10]$.

Solution :



Exercice 12. Tracer la fonction complexe rationelle $f(z) = \dfrac{z+4}{z^5 - 3iz^3 + 2}$.

Solution :



Exercice 13. Reproduire un dessin de votre choix de la page `http://mpmath.googlecode.com/svn/gallery/gallery.html`.

Exercices du Chapitre 7 : Limites et séries (partie 1)

Pour les exercices suivants, il sera nécessaire d'importer les fonctions et symboles suivants :

```
from sympy import limit, summation, oo, log, pi, sqrt
from sympy.abc import a,j,n,x
```

Exercice 14. Évaluer la limite de la suite $\sqrt[n]{n}$.

Solution : 1

Exercice 15. Évaluer la limite à gauche de la fonction $\frac{|x|}{x}$ en 0.

Solution : -1

Exercice 16. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$. Qu'en déduisez-vous ?

Solution : Par défaut, sympy calcule la limite à droite.

Exercice 17. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ définie par

$$x_j = \frac{j}{\ln(\pi)} \left(\sqrt{\ln^2(\pi) + \frac{1}{j}} - \ln(\pi) \right).$$

Solution : $\frac{1}{2\ln^2(\pi)}$

Exercice 18. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ de terme général

$$x_j = \sqrt{2j^2 + 2j - 3} - \sqrt[4]{4j^4 + 3j^3 + 2j + 1}$$

Solution : $\frac{5}{16}\sqrt{2}$

Exercice 19. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ de terme général

$$x_j = \sqrt[j]{j^a}.$$

où a est un paramètre réel.

Solution : 1

Exercice 20. Calculer les limites

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{|4x^3 - x|}}{\sqrt{5 - x^3}}.$$

Solution : 1/2 et 2

Exercice 21. Évaluer la somme $\sum_{n=1}^{63} n$.

Solution : 2016

Exercice 22. Évaluer la somme $\sum_{n=0}^{100} n^2$.

Solution : 338350

Exercice 23. Évaluer la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution : $\frac{\pi^2}{6}$

Exercice 24. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j a^j}{2j},$$

pour toutes les valeurs possibles du nombre réel a. Dans le cas où elle converge, donner sa valeur.

Solution : Elle converge si $|a| \leq 1$ et $a \neq -1$. Dans ce cas, la série vaut $-\frac{\ln(a+1)}{2}$.