Devoir 1

En utilisant SymPy ou Mathematica mais un seul des deux, répondre aux questions suivantes.

Écrire vos réponses dans le fichier `Devoir-1-<MATRICULE>-<NOM>.ipynb` ou `Devoir-1-<MATRICULE>-<NOM>.nb` selon que vous utilisiez SymPy ou Mathematica téléchargeable sur la page web du cours. Inclure la démarche, les réponses aux questions et les justifications. Envoyer votre fichier avant le **jeudi 24 mars à 23h59** par courriel à l'adresse `slabbe@ulg.ac.be` en remplaçant `<MATRICULE>` par votre numéro de matricule et `<NOM>` par votre nom.

Pour écrire du texte entre les cellules et justifier une réponse, utiliser `Format > Style > Text` en Mathematica, et `Cell > Cell Type > Markdown` en SymPy et Jupyter.

Le plagiat sera détecté et entraînera une note de zéro pour les personnes impliquées.

Question 1. Le Théorème de Gauss–Wantzel[1] dit qu'un polygone régulier à n côtés est constructible avec la règle et le compas si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et de nombres premiers de Fermat distincts dont les seuls connus sont 3, 5, 17, 257 et 65537. Est-ce qu'un polygone régulier à 6 côtés est constructible ? Est-ce qu'un polygone régulier à 24480 côtés est constructible ? Est-ce qu'un polygone régulier à 88305875025920 côtés est constructible ?

Question 2. Résoudre l'équation $x^3 - 3x^2 - 5 = 0$ et donner une valeur numérique approchée des solutions.

Question 3. Tracer la surface de Dini[2] dont les équations paramétriques sont :

$$\begin{aligned} x &= a\cos(u)\sin(v) \\ y &= a\sin(u)\sin(v) \\ z &= a\left(\cos(v) + \ln\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right)\right) + bu \end{aligned}$$

pour $a = 1$, $b = 1$ sur les intervalles $0 \leq u \leq 5\pi$ et $0.01 \leq v \leq 1$.

Question 4. Soit $p(x) = -x^4 + 28x^3 - 221x^2 + 350x + 600$ un polynôme. Trouver l'ensemble des valeurs de x telles que $p(x)$ atteint un optimum local. Dire s'il s'agit d'un minimum ou un maximum. Calculer l'aire de la région $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq p(x)\}$ bornée supérieurement par le polynôme $p(x)$ et inférieurement par l'abscisse.

Question 5. On considère la fonction $f(x) = x^{\frac{x}{1-x}}$ pour tout réel $x > 0$. Donner le domaine de définition de f. Calculer les limites de la fonction f aux bornes des intervalles qui composent le domaine de f. Expliquez comment prolonger f par continuité aux points $x = 0$ et $x = 1$.

Question 6. On considère les vecteurs $v_1 = (-8, 1, -10, 1, 6)$, $v_2 = (-6, -10, 2, 10, -3)$, $v_3 = (-2, 8, 10, 1, 10)$, $v_4 = (-14, -9, -8, 11, 3)$, $v_5 = (-2, -3, 5, -8, -6)$. Donner une base du sous espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5. Le vecteur $w = (0, -6, -1, -8, 10)$ est-il dans ce sous-espace vectoriel ? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de la base.

1. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Gauss-Wantzel`
2. `https://en.wikipedia.org/wiki/Dini's_surface`