

q - analogue des nb rationnels (présentation) 28 nov 2025

PGCD(81, 35) = 1

Algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 81 &= 2 \cdot 35 + 11 & 2 &= \left\lfloor \frac{81}{35} \right\rfloor \\ 35 &= 3 \cdot 11 + 2 \\ 11 &= 5 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

→ quotients des divisions

$$\frac{81}{35} = 2 + \frac{11}{35} = 2 + \frac{1}{\frac{35}{11}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{2}{11}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$$

$$= [2; 3, 5, 2] = [2; 3, 5, 1, 1] \quad \text{suite de quotients partiels}$$

L'algorithme du PGCD d'Euclide permet d'obtenir le développement en fraction continue d'un nb. rationnel.

Approximation diophantienne

$$\pi \approx 3,14 = \frac{314}{100} = \frac{157}{50}$$

$$\left| \pi - \frac{157}{50} \right| \approx 0,00159$$

Thm (Dirichlet, 1842) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \exists^\infty p/q \in \mathbb{Q} \quad p, q \neq 0$

$$|x - p/q| < \frac{1}{q^2} \quad (*)$$

Un p/q satisfaisant (*) est appelé convergent de x .

EX $\left| \pi - 22/7 \right| \approx 0,00126 < \frac{1}{49}$

Questions Comment trouver les convergents d'un nb irrationnel?

Réponse : PGCD($x, 1$) : $x = [x] \cdot 1 + \{x\}$

EX PGCD($\pi, 1$) : $\pi = 3 \cdot 1 + (\pi - 3) \quad 1 = a_1 \cdot \{x\} + (r)$

$$1 = 7 \cdot (\pi - 3) + \dots$$

$$\begin{aligned} &= 15 \\ &= 1 \\ &= 292 \end{aligned}$$

→ suite des quotients partiels

Forme matricielle des fractions continues

Si $\frac{r}{s} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}]$, alors

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \dots R^{a_{2l-2}} L^{a_{2l-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \dots R^{a_{2l-2}} L^{a_{2l-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[EX] $\begin{pmatrix} 104348 \\ 33215 \end{pmatrix} = R^3 L^7 R^{15} L R^{292} L^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 22 \\ 7 \end{pmatrix} = R^3 L^7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

q -analogue des nb. rationnels de Morier-Genoud, Ovsienko (2020)

[DEF] $[-]_q : \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{Z}(q)$

est l'unique fonction qui commute avec l'action du groupe modulaire $PSL(2, \mathbb{Z})$ telle que $[0]_q = 0$.

Proposition (MGO, 2020) Soit $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}_{>0}$, alors $[\frac{r}{s}]_q = \frac{R(q)}{S(q)}$

où $\begin{pmatrix} R(q) \\ S(q) \end{pmatrix} = R_q^{a_0} L_q^{a_1} \dots R_q^{a_{2l-2}} L_q^{a_{2l-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $L_q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rmk: fonction pour $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}_{>0}$.

MGO 2020: $[\frac{r}{s} + i]_q = q [\frac{r}{s}]_q + 1$ permet d'étendre à tout $\mathbb{Q}$.

[EX] $[\frac{1}{2}]_q = \frac{q}{q+1}$, $[\frac{7}{2}]_q = \frac{q^4 + q^3 + 2q^2 + 2q + 1}{q+1}$

$[1]_q = 1$, $[\frac{1}{0}]_q = \frac{1}{0}$, etc

q -analogues des nb rationnels : des syst de num. d'Ostrowski
aux couples parfaits avec JC Aval, arxiv:2511.11290

Euler ≈ 1760 : $[n]_q = 1 + q + \dots + q^{n-1}$

q -factoriel : $[n]_q! = [1]_q [2]_q \dots [n]_q = \sum_{\pi \in S_n} q^{\text{inv}(\pi)}$

Gauss, 1808, q -binomial

$$\binom{n}{m}_q = \frac{[n]_q!}{[n-m]_q! [m]_q!} = \sum_{\substack{\text{chemin dans} \\ \text{box } m \times (n-m)}} q^{\text{aire}(w)}$$

$w \in \{0,1\}^*$
 $\vec{w} = (m, n-m) = (w|_0, w|_1)$

Sylvester (1878) : les polynômes $\binom{n}{m}_q$ sont unimodaux.
 (conjecture de Cayley, 25 ans avant).

Morier - Genoud, Ovsiienko (2020) : $[x]_q \forall x \in \mathbb{Q}$
 déjà 31 citations + 2025 AMS David P. Robbins Prize

Def (selon Propp, blogues, juillet 2025)

$$[\]_q : \mathbb{Q} \cup \{\infty = \frac{1}{0}\} \rightarrow \mathbb{Z}(q)$$

est l'unique fonction telle que

$$[0]_q = 0, \quad [x+1]_q = q[x]_q + 1, \quad [x]_q [-x^{-1}]_q = -q^{-1}$$

EX

$$[1]_q = q[0]_q + 1 = 1$$

$$[2]_q = q[1]_q + 1 = q + 1$$

$$[-\frac{1}{2}]_q = -\frac{1}{q} \cdot [2]_q^{-1} = \frac{-1}{q^2 + q}$$

$$[\frac{1}{2}]_q = q[-\frac{1}{2}]_q + 1 = \frac{-1}{q+1} + 1 = \frac{q}{q+1}, \quad \text{etc.}$$

$$[\frac{3}{5}]_q = \frac{q^3 + q^2 + q}{q^3 + q^2 + 2q + 1}$$

$$[\frac{4}{5}]_q = \frac{q^4 + q^3 + q^2 + q}{q^4 + q^3 + q^2 + q + 1}$$

Fractions continues

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1}} \quad \text{pair} \quad = [3; 7] = [3, 6, 1]$$

$$\frac{7}{22} = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}} = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1}}} \quad \text{pair} \quad = [0; 3, 7] = [0; 3, 6, 1]$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ admet unique dev. FC $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ $a_0 \in \mathbb{Z}$
 $a_i \geq 1, i \geq 1$

Convergents $\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, \dots, a_i] \quad i \geq 0$

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \quad , \quad p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0$$

$$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \quad , \quad q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1$$

Thm (Ostrowski, 1921) $\forall n \geq 0 \exists ! k \geq 0 \exists ! (b_i)_{i=1}^k$

$$\text{t.g.} \quad n = \sum_{i=1}^k b_i q_{i-1}$$

où $0 \leq b_i \leq a_i$, $b_1 \neq a_1$, et $b_i = a_i \Rightarrow b_{i-1} = 0$.

[EX] Avec $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on obtient le syst. denom. de Zeckendorf.
où $\{q_i\}_i$ est la suite de Fibonacci.

[DEF] Soit $a = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}]$ avec $a_0 \geq 0, a_i \geq 1$ pour $i \geq 1$.

Une suite $(b_i)_{i=0}^{k-1}$ est admissible pour a si

- $0 \leq b_i \leq a_i \quad \forall i$

- si $i > 0$ impair, et $b_i = a_i$ alors $b_{i-1} = a_{i-1}$

- si $i > 0$ pair, et $b_i = 0$ alors $b_{i-1} = 0$.

Soit $B(a) = \{ (b_i)_{i=0}^{k-1} \text{ admissible pour } a \}$

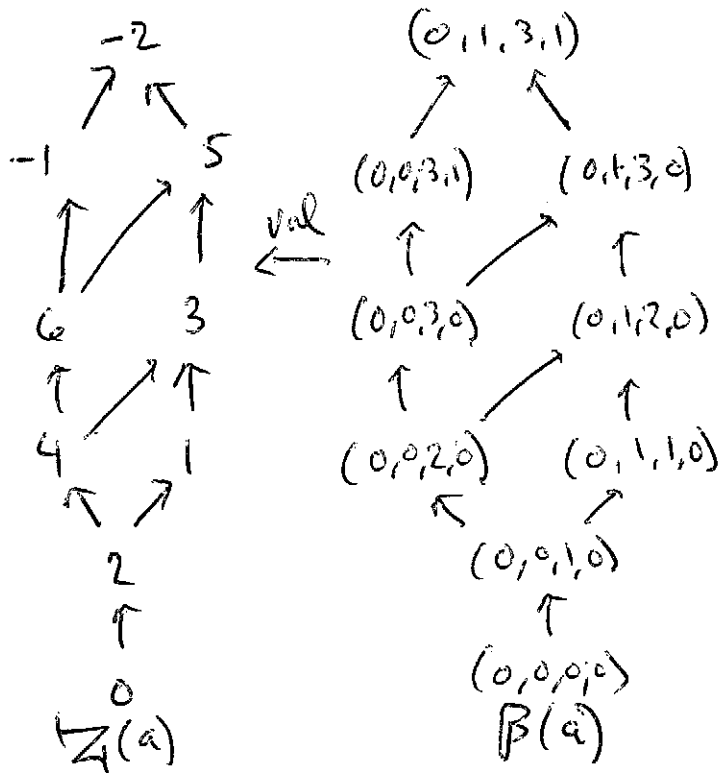
Soit $(r_i)_{i=0}^k$ t.g. $r_i = p_{i-1} + q_{i-1}$

[Théorème] La fonction $val_a: B(a) \rightarrow \mathbb{Z}(a)$
 $(b_i)_{i=0}^{k-1} \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i b_i r_i$ est une bijection

$$\text{où } \mathbb{Z}(a) = \begin{cases} \mathbb{Z} \cap [0, r_k) & \text{si } k \text{ impair} \\ \mathbb{Z} \cap [r_{k-1}, r_k) & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$$

$(b_0, b_1, b_2, b_3, \dots)$
MAX = MAX MEM
000

EX



$$a = [0, 1, 3, 1] \quad x = \frac{4}{5}$$

~~val(b)~~

$$\frac{p_i}{q_i} = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \right)$$

$$r_i = (1, 1, 2, 7, 9)$$

$$\mathbb{Z}(a) = \mathbb{Z} \cap [-2, 7]$$

$$\text{val}(b) = \langle b, (1, -1, 2, -7) \rangle$$

On a une union disjointe $\beta(a) = \beta^{\circ}(a) \cup \beta^{\circ}(a)$

$$\beta^{\circ}(a) = \left\{ (b_i)_{i=0}^{k-1} \in \beta(a) \mid b_0 > 0 \text{ ou } a_0 = 0 < b_1 \neq a_1 \right\}$$

$$\beta^{\circ}(a) = \left\{ \text{---} | \text{---} \mid b_0 = 0 < a_0 \text{ ou } a_0 = 0 \leq b_1 < a_1 \right\}$$

Thm B

Soit $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ et $x = [a_0; a_1, \dots, a_{2l-1}]$, alors

$$\begin{pmatrix} \sum_{b \in \beta^{\circ}(a)} \delta^{\|b\|_1} \\ \sum_{b \in \beta^{\circ}(a)} \delta^{\|b\|_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} R_{\delta}^{a_0, a_1} \dots R_{\delta}^{a_{2l-2}, a_{2l-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cor

$$[x]_{\delta} = \delta^{-1} \frac{\sum_{b \in \beta^{\circ}(a)} \delta^{\|b\|_1}}{\sum_{b \in \beta^{\circ}(a)} \delta^{\|b\|_1}}$$

EX

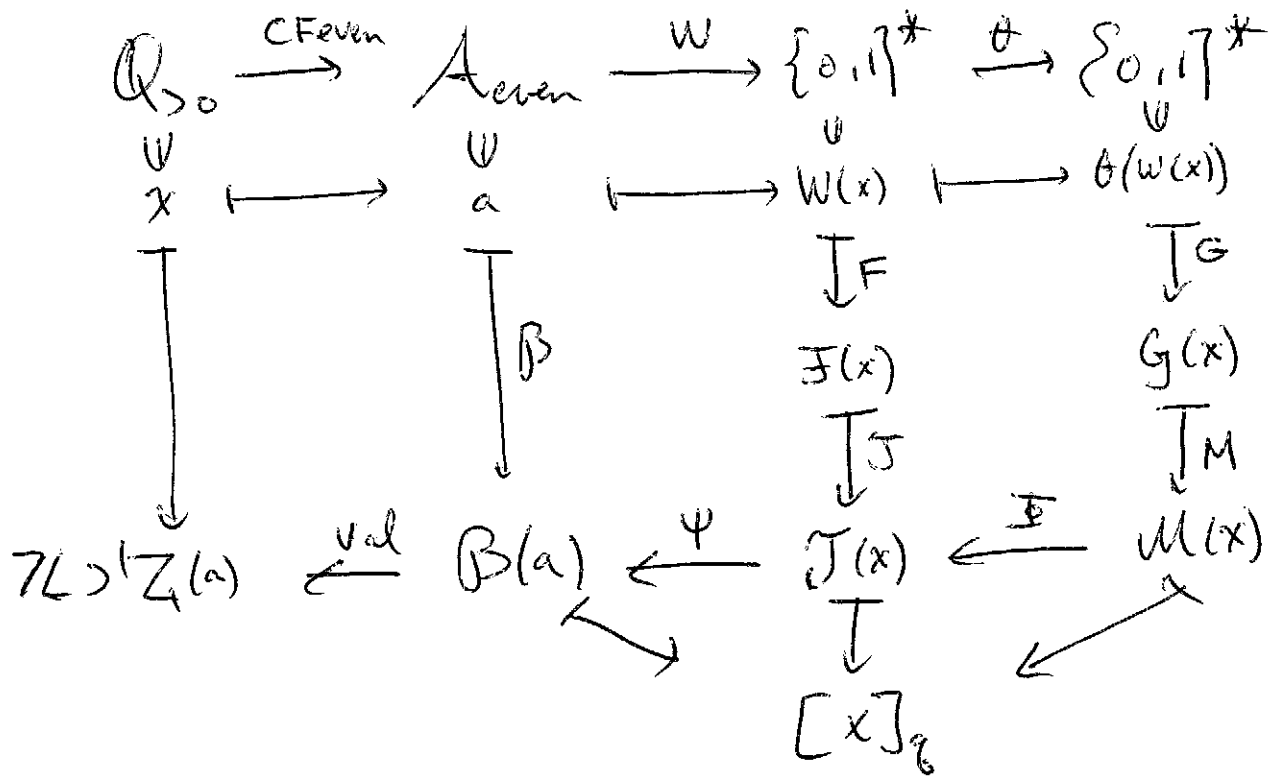
$$\left[\frac{4}{5} \right]_{\delta} = \delta^{-1} \frac{\delta^5 + \delta^4 + \delta^3 + \delta^2}{\delta^4 + \delta^3 + \delta^2 + \delta + 1}$$

Prop

$$\text{conv}(\beta(a)) \cap \mathbb{Z}^k = \beta(a)$$

interesting polytope!

open: What is it? Describe it!



Posets Palissade

$$W: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \{0,1\}^*$$

$$x \mapsto 1^{a_0} 0^{a_1} \dots 1^{a_{2\ell-2}} 0^{a_{2\ell-1}-1}$$

où $[a_0, a_1, \dots, a_{2\ell-1}]$ est le dev. FC. de x ^{longueur} pair.

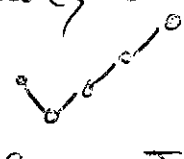
Lemme W est une bijection.

$\forall$ mot $w = w_1 \dots w_n \in \{0,1\}^*$ soit $F(w) = (\{y_0, y_1, \dots, y_n\}, \triangleleft)$
 l'ordre partiel dont les relations de couvertures sont

$$\begin{cases} y_{i-1} \triangleleft y_i & \text{si } w_i = \textcircled{1} \\ y_{i-1} \triangleright y_i & \text{si } w_i = \textcircled{0} \end{cases}$$

Remarque: $F: \{0,1\}^* \rightarrow \{\text{posets palissade}\}$ est une bijection.

$\mathcal{F} = F \circ W: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \{\text{posets palissade}\}$ est une bijection

Ex $\mathcal{F}\left(\frac{4}{5}\right) = \mathcal{F}([0,1,3,1]) = F(0111) =$ 

Soit $\mathcal{J}(x)$ l'ens des stens fermés inf. de $\mathcal{F}(x)$.

$$\mathcal{J}^{\circ}(x) = \{I \in \mathcal{J}(x) \mid y_0 \in I\}$$

$$\mathcal{J}^{\circ}(x) = \{I \in \mathcal{J}(x) \mid y_0 \notin I\}$$

Thm c $[x]_q = q^{-1} \frac{\sum_{I \in \mathcal{J}^{\circ}(x)} q^{|I|}}{\sum_{I \in \mathcal{J}(x)} q^{|I|}}$

$$\theta: \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$$

$$\forall x \in \{0,1\}, w \in \{0,1\}^* \quad \theta(xw) = \begin{cases} \bar{x} \theta(w), & |w| \text{ pair} \\ x \theta(w), & |w| \text{ impair} \end{cases}$$

θ Involution

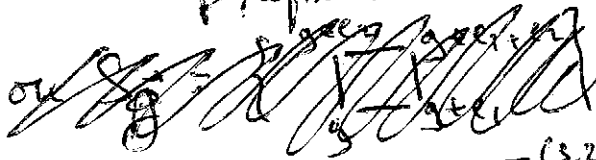
Snake Graph $G: \{0,1\}^* \rightarrow \{\text{snake graphs}\}$

$$\forall w \in \{0,1\}^*, \vec{w} = (|w|_0, |w|_1) \in \mathbb{N}^2$$

$$G(w) = (V_w, E_w) \quad \text{snake graph}$$

Sommets: $V_w = \{ \vec{p} : p \text{ préfixe de } w \} + \{0, e_1, e_2, e_1 + e_2\} \subset \mathbb{Z}^2$

arêtes: $E_w = \bigcup_{p \text{ préfixe de } w} S_{\vec{p}} = \bigcup_{p \text{ préfixe de } w} \left\{ \begin{array}{cc} \vec{p} + e_2 & \vec{p} + e_1 + e_2 \\ | & | \\ \vec{p} & \vec{p} + e_1 \end{array} \right\}$



EX

$$G(010) = \begin{array}{cc} & (3,2) \\ & \square \\ (0,0) \square & \square \end{array} = G(4/1)$$

On définit : $\mathcal{G} = G \circ \theta \circ W : \mathcal{Q}_{>0} \rightarrow \{\text{snake graphs}\}$ (bijection).

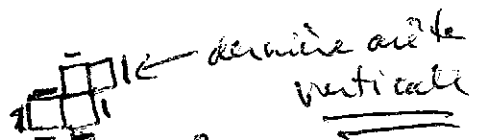
$\forall w \in \{0,1\}^*$ soit $M(w) = \{\text{couplages parfaits de } G(w)\}$

Aussi $\mathcal{M}(x) = \{ \text{---} || \text{---} \mathcal{G}(x) \} \quad \forall x \in \mathcal{Q}_{>0}$

$b_w \in M(w)$ couplage parfait de base

$\mathcal{M}^{\perp}(x) = \{m \in \mathcal{M}(x) \mid \text{première arête de } m \text{ \textbf{\textit{à}} base}\}$

$\mathcal{M}''(x) = \{m \in \mathcal{M}(x) \mid \text{---} || \text{---} \in \text{base}\}$



Thm D

$\forall x \in \mathcal{Q}_{>0}$

$$[x]_{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^{-1} \frac{\sum_{m \in \mathcal{M}^{\perp}(x)} \mathcal{G}^{\text{area}(m \Delta b)}}{\sum_{m \in \mathcal{M}''(x)} \mathcal{G}^{\text{area}(m \Delta b)}}$$

où b est le couplage parfait de base de $\mathcal{G}(x)$.