Une caractérisation des mots Sturmiens par les paires asymptotiques indistinguables

arXiv:2011.08112

Sebastián Barbieri*, Sébastien Labbé† et Štěpán Starosta‡

* Universidad de Santiago de Chile
† CNRS, LaBRI, Université de Bordeaux
‡ Czech Technical University in Prague

Séminaire de combinatoire du LaCIM
UQAM, Montréal
25 février 2021

Plan

- Mots sturmiens

  Mots mécaniques, mots de Christoffel, Théoème de Pirillo
- Terminologie

  Dynamique symbolique, paires asymptotiques, discrépance des motifs, paires asymptotiques indistinguables
- Résultats

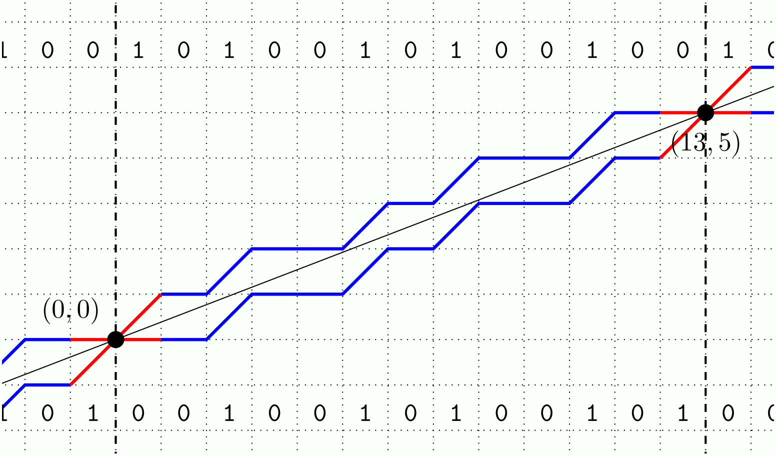
  Théorème A, Théorème B, Théorème C

Mots mécaniques (Morse, Hedlund, 1940)

Soit $\alpha \in [0,1]$ et $c_\alpha, c'_\alpha : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ les mots biinfinis

$$c'_\alpha(n) = \lceil \alpha(n+1) \rceil - \lceil \alpha n \rceil \qquad \text{(mot mécanique } \textbf{supérieur}\text{)}$$

$$c_\alpha(n) = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor - \lfloor \alpha n \rfloor \qquad \text{(mot mécanique } \textbf{inférieur}\text{)}$$

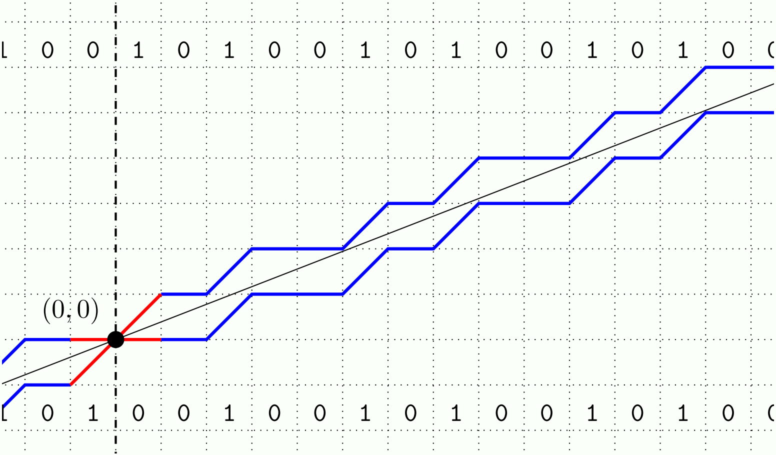


Mots sturmiens (Morse, Hedlund, 1940)

Si $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, alors les mots mécaniques sont **non-périodiques** :

$c'_\alpha(n) = \lceil \alpha(n+1) \rceil - \lceil \alpha n \rceil$ (mot sturmien caracteristique **supérieur**)

$c_\alpha(n) = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor - \lfloor \alpha n \rfloor$ (mot sturmien caractéristique **inférieur**)



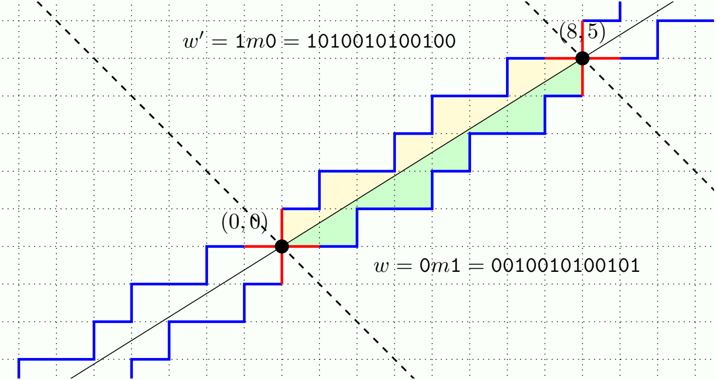
Mots de Christoffel

Si $\alpha \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, alors les mots mécaniques sont **périodiques** :

$c'_\alpha(n) = {}^\infty w'^\infty$ où w' est le mot de Christoffel **supérieur** de pente p/q,

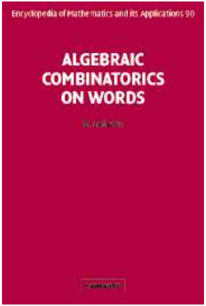
$c_\alpha(n) = {}^\infty w^\infty$ où w est le mot de Christoffel **inférieur** de pente p/q,

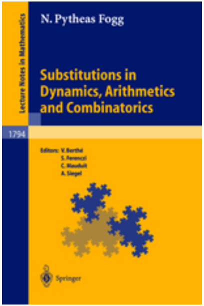
où $\alpha = p/(p+q)$ et $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sont des entiers copremiers.

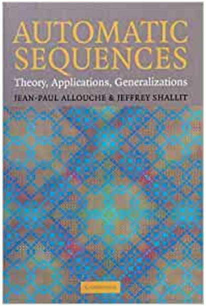


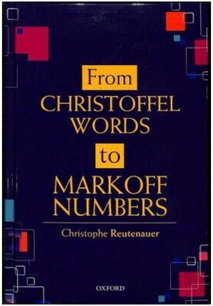
De plus $w \leq_{lex} p \leq_{lex} w'$ pour toute période primitive p de c_α et c'_α.

Livres









- Chapitre 2 du livre de Lothaire (2002), par Berstel et Séébold
- Chapitre 6 du livre de Pytheas Fogg's (2002), par Arnoux
- Chapitre 9 du livre d'Allouche et Shallit's book (2003)
- Livre de Christophe Reutenauer (2019)

Mots sturmiens

La **complexité en facteurs** d'un mot infini $w \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ compte le nombre $p_w(n)$ de facteurs de longueur n dans w :

$$p_w(n) = \#(\mathcal{L}(w) \cap \Sigma^n).$$

Par exemple,

$$w = \cdots 1010010100101.0010010100101 \cdots$$

$$\mathcal{L}_0(w) = \{\varepsilon\}, \qquad \mathcal{L}_2(w) = \{00, 01, 10\},$$
$$\mathcal{L}_1(w) = \{0, 1\}, \qquad \mathcal{L}_3(w) = \{001, 010, 100, 101\}.$$

Theorem (Theorem 2.1.13, Lothaire, 2002)

Soit $s \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ un mot infini. Les conditions suivantes sont équivalentes.

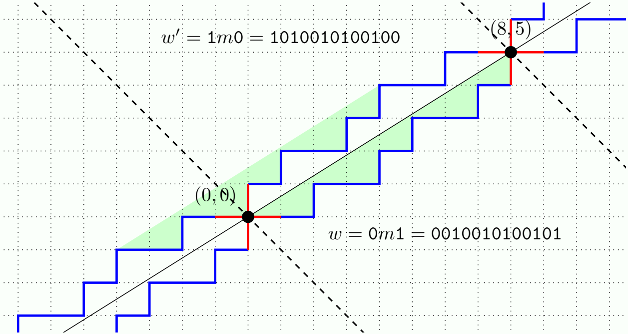
- *s est **sturmien**, i.e., $P_s(n) = n + 1$ pour tout $n \geq 0$,*
- *s est 1-**équilibré et apériodique**,*
- *s est un **mot mécanique de pente irrationnelle**.*

Théorème de Pirillo (2001)

Soit $w = \mathtt{0}m\mathtt{1}$ et $w' = \mathtt{1}m\mathtt{0}$ pour un certain $m \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$.

Theorem

Le mot w est un mot de Christoffel inférieur ssi w et w' sont conjugués.



A *d*-dimensional extension of Christoffel words

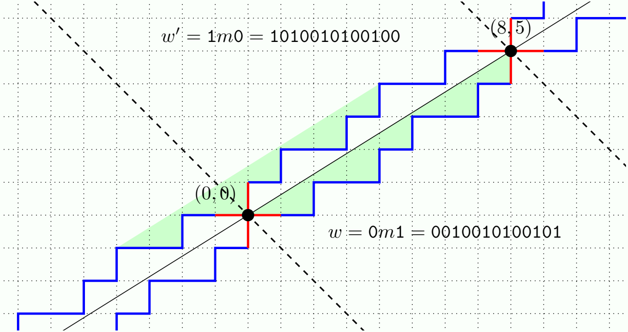
S. Labbé, C. Reutenauer, Discrete Comput. Geom. ***54*** *(2015) 152–181.*

Théorème de Pirillo (adapté pour ${}^\infty w^\infty$)

Soit $w = \mathtt{0}m\mathtt{1}$ et $w' = \mathtt{1}m\mathtt{0}$ où $m \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$.

Theorem

${}^\infty w^\infty = c_\alpha$ est un mot mécanique inférieur de pente $\alpha = p/(p+q)$ ssi ${}^\infty w^\infty$ est un décalé de ${}^\infty w'^\infty$.



Question : Soit $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

Est-ce que $\lim_{\frac{p}{p+q}\to\alpha}$ (Théorème de Pirillo) existe ?

Dynamique symbolique

On considère

- un ensemble fini Σ : l'**alphabet**,
- l'espace des **configurations** $\Sigma^{\mathbb{Z}} = \{x \colon \mathbb{Z} \to \Sigma\}$,
- $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ doté de la **topologie prodiscrète**,

$$x = \cdots \boxed{0}\,0010111011100.0110010000001101\,\boxed{100001} \cdots$$

$$y = \cdots \boxed{1}\,0010111011100.0110010000001101\,\boxed{011110} \cdots$$

- à un motif $p \colon S \to \Sigma$ avec support fini $S \subset \mathbb{Z}$, un **cylindre**

$$[p] = \left\{ x \in \Sigma^{\mathbb{Z}} \colon x|_S = p \right\}.$$

- l'action de **décalage** $\mathbb{Z} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \Sigma^{\mathbb{Z}}$.

$$\sigma^{-1}(x) = \cdots 1000101110111 0.0011001000000110110000 \cdots$$

$$x = \cdots 0001011101110 0.0110010000001101100001 \cdots$$

$$\sigma(x) = \cdots 0010111011100 0.1100100000011011000010 \cdots$$

$$\sigma^2(x) = \cdots 0101110111000 1.1001000000110110000100 \cdots$$

Paires asymptotiques

Soit $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ les deux configurations $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$, e.g.,

$$x = \cdots 0010111011\boxed{0}100.0\boxed{0001}01\boxed{10}110010000011\cdots$$
$$y = \cdots 0010111011\boxed{1}100.0\boxed{1110}01\boxed{01}110010000011\cdots$$

différentes aux positions $F = \{-4\} \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{7, 8\}$.

Definition

$x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ sont **asymptotiques** si elles diffèrent en un nombre fini de positions de $\mathbb{Z}$.

L'ensemble $F = \{n \in \mathbb{Z} : x_n \neq y_n\}$ est appelé **support des différences** de (x, y).

Discrépance des motifs

- Deux configurations asymptotiques $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ avec support des différences F.
- Un motif $p\colon S \to \Sigma$ avec support fini $S \subseteq \mathbb{Z}$.

But : comparer le # d'occurrences de p dans x et y : $|y|_p - |x|_p$.

Exemple : motif $p = .1001$ avec support $S = \{0, 1, 2, 3\}$

$$x = \cdots 10\underline{1001}0\underline{1001}0\boxed{\underline{1.0}}\underline{0\overline{1}}\overline{001}0\overline{1001}01\cdots$$

$$y = \cdots 10\underline{1001}0\underline{100\overline{1}}\overline{0}\boxed{\overline{0.1}}0\overline{1001}0\overline{1001}01\cdots$$

avec support des différences $F = \{-1, 0\}$.

Definition

La ***p*-discrépance** pour la paire (x, y) est donnée par

$$\Delta_p(x, y) = \sum_{n \in F - S} \mathbb{1}_{[p]}(\sigma^n y) - \mathbb{1}_{[p]}(\sigma^n x).$$

Note : $n \in \mathbb{Z} \setminus (F - S)$ si et seulement si $(n + S) \cap F = \varnothing$.

Paires asymptotiques indistinguables

Soit $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ une paire asymptotique.

Definition

x, y sont **indistinguables** si $\Delta_p(x, y) = 0$ pour tout motif fini $p \in \Sigma^S$.

Exemple 1 : La paire asymptotique **triviale** (x, x) est indistinguable.

Exemple 2 :

$$x = \cdots 00000000000000.\boxed{1}000000\boxed{0}000000000000\cdots$$
$$y = \cdots 00000000000000.\boxed{0}000000\boxed{1}000000000000\cdots$$

Dans les deux exemples, x et y sont dans la **même orbite** de $\mathbb{Z} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \Sigma^{\mathbb{Z}}$.

Question : Peut-on trouver d'autres exemples ?

Paires asymptotiques indistinguishables

Soit $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ une paire asymptotique.

Definition

x, y sont **indistinguables** si $\Delta_p(x, y) = 0$ pour tout motif fini $p \in \Sigma^S$.

Non-Exemple 3, parce que $\Delta_1(x, y) = -7$:

$$x = \cdots 00000000000000.\boxed{1111111}1111111111111\cdots$$
$$y = \cdots 00000000000000.\boxed{0000000}1111111111111\cdots$$

Exemple 4, avec $\Delta_{abcabc}(x, y) = 1 - 1 = 0$:

$$x = \cdots bcabcbc\underline{abcabc}bc\underline{abc}.\boxed{\underline{abc}}bcabcbc\underline{abcabc}bcabcbc\cdots$$
$$y = \cdots bcabcbc\underline{abcabc}bcabc.\boxed{bc\underline{a}}\underline{bcabc}bc\underline{abcabc}bcabcbc\cdots$$

Théorème A

Theorem

*Soit $x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^{\mathbb{Z}}$ et supposons que x est **récurrent**.*
*La paire (x, y) est une **paire asymptotique indistinguable** avec support des différences $F = \{-1, 0\}$ tel que $x_{-1}x_0 = \mathtt{10}$ et $y_{-1}y_0 = \mathtt{01}$*

si et seulement s'

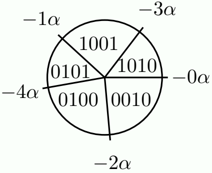
*il existe $\alpha \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x = c_\alpha$ et $y = c'_\alpha$ sont les **mots sturmiens caractéristiques** inférieur et supérieur de pente α.*

Idée de la preuve du Théorème A

(Rappelons l'hypothèse que x est récurrent)

x, y pair asympt. indistinguable

x, y mots mécaniques $\xleftarrow[\text{P. Fogg, 2002}]{\text{Coven-Hedlund, 73'}}$ x, y ont complexité $n+1$



$$x = \cdots 101001010010\ \boxed{1.0}\ 010010100101 \cdots$$

$$y = \cdots 101001010010\ \boxed{0.1}\ 010010100101 \cdots$$

Proposition

Soit $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ une paire asymptotique indistinguable non-triviale dont le support des différences F est contenu dans un interval I. Pour tout $n \geq 1$

$$n + 1 \leq \#\mathcal{L}_n(x) \leq n + \#I - 1.$$

Exemple utilisant les mots de Christoffel

Soit $\mathtt{0}m\mathtt{1}$ un mot de Christoffel inférieur de pente p/q avec $p+q=n$. Les 2 mots de longueur $2n$:

$$\mathtt{1}m\mathtt{1}.\mathtt{0}m\mathtt{1}$$

$$\mathtt{1}m\mathtt{0}.\mathtt{1}m\mathtt{1}$$

contiennent $n+1$ facteurs de longueur n (une occurrence de chaque). Par exemple,

```
sage: u = Word('10100101001010010010100101')
sage: v = Word('10100101001001010010100101')
sage: v.factor_set(13) == u.factor_set(13)
True
sage: len(u.factor_set(13))
14
```

Théorème B

Theorem

Soit $x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^{\mathbb{Z}}$.
La paire (x, y) est une ***paire asymptotique indistinguable*** *avec support des différences $F = \{-1, 0\}$ tel que $x_{-1}x_0 = \mathtt{10}$ et $y_{-1}y_0 = \mathtt{01}$*

si et seulement s'

il existe une suite monotone $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\alpha_n \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ t.q.

$$x = \lim_{n\to\infty} c_{\alpha_n} \quad \text{et} \quad y = \lim_{n\to\infty} c'_{\alpha_n}.$$

sont les limites de ***mots sturmiens caractéristiques*** *de pente α_n.*

Si $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, alors

$$x = \lim_{n\to\infty} c_{\alpha_n} = c_\alpha \quad \text{et} \quad y = \lim_{n\to\infty} c'_{\alpha_n} = c'_\alpha$$

et ça correspond au Théorème A.

Théorème B : limites vers les pentes rationnelles

Supposons que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = p/(p+q) \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, avec $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ copremiers. Si $p \neq 0$ et $q \neq 0$ et la limite est **à droite**, alors

$$\lim_{\alpha\to\frac{p}{p+q}^+} c_\alpha = {}^\infty(1m0)(1m1).(0m1)(0m1)^\infty$$

$$\lim_{\alpha\to\frac{p}{p+q}^+} c'_\alpha = {}^\infty(1m0)(1m0).(1m1)(0m1)^\infty$$

ou la limite est **à gauche**, alors

$$\lim_{\alpha\to\frac{p}{p+q}^-} c_\alpha = {}^\infty(0m1)(0m1).(0m0)(1m0)^\infty$$

$$\lim_{\alpha\to\frac{p}{p+q}^-} c'_\alpha = {}^\infty(0m1)(0m0).(1m0)(1m0)^\infty$$

Cas limites : lorsque $p = 0$ et $q = 1$ ou $p = 1$ et $q = 0$, alors

$$\lim_{\alpha\to 0^+} c_\alpha = {}^\infty 01.00^\infty \qquad \lim_{\alpha\to 1^-} c_\alpha = {}^\infty 11.01^\infty$$

$$\lim_{\alpha\to 0^+} c'_\alpha = {}^\infty 00.10^\infty \qquad \lim_{\alpha\to 1^-} c'_\alpha = {}^\infty 10.11^\infty$$

Idée de la preuve du Théorème B ($\Longrightarrow$)

Soit $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ et supposons que x est **non récurrent**.
Si la paire (x, y) est une **paire asymp. indistinguable** avec support des différences $F = \{-1, 0\}$ telle que $x_{-1}x_0 = 10$ et $y_{-1}y_0 = 01$,

alors

$x = \sigma^k(y)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.
Si $k \geq 2$, alors il existe $m \in \{0, 1\}^{k-2}$ t.q.

$$x = {}^{\infty}(1m0)(1m1).(0m1)(0m1)^{\infty}$$
$$y = {}^{\infty}(1m0)(1m0).(1m1)(0m1)^{\infty}$$

- $1m0$ appraît dans y intersectant le support des différences F
- il doit apparaître dans x intersectant le support des différences F
- Donc $1m0$ est un facteur de $1m1.0m1$, mais pas comme préfixe
- Alors $1m0$ est un facteur de $m1.0m1$ et $0m1.0m1 = (0m1)^2$
- Ceci implique que $1m0$ et $0m1$ sont conjugués
- Le Théorème de **Pirillo** $\Longrightarrow$ $0m1$ est un **mot de Christoffel inférieur** de pente p/q pour des entiers copremiers $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ satisfaisant $p + q = k$.

Liens avec des travaux de Christophe et Franco

Le Théorème B est relié au classement des mots 1-équilibrés en 4 catégories :

- mots 1-équilibrés apériodique ne passant pas par l'origine ;
- mots 1-équilibrés apériodique passant par l'origine ;
- mots périodiques ${}^{\infty}(amb)^{\infty} \equiv {}^{\infty}(bma)^{\infty}$
- mots ultimement périodiques

$$
{}^{\infty}(bma)(bmb)(amb)^{\infty}
$$

$$
{}^{\infty}(amb)(ama)(bma)^{\infty}
$$

C'est relié à la théorie de Markoff, voir :

On Markoff's property and Sturmian words

C. Reutenauer, Math. Ann. ***336*** *(2006) 1–12.*

A note on the Markoff condition and central words

A. Glen, A. Lauve, and F. V. Saliola, Inform. Process. Lett. ***105*** *(2008) 241–244.*

Théorème C

Theorem

Soit Σ un ***alphabet fini****. Alors $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ est une* ***paire asymptotique indistinguable*** *non-triviale*

si et seulement si

soit

- *x est* ***recurrent*** *et il existe $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, une substitution $\varphi\colon \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\} \to \Sigma^+$ et un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$\{x, y\} = \{\sigma^m \varphi(\sigma(c_\alpha)), \sigma^m \varphi(\sigma(c'_\alpha))\},$$

- *x est* ***non recurrent*** *et il existe une substitution $\varphi\colon \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\} \to \Sigma^+$ et un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$\{x, y\} = \{\sigma^m \varphi({}^\infty\mathtt{0}.\mathtt{1}\mathtt{0}^\infty), \sigma^m \varphi({}^\infty\mathtt{0}.\mathtt{0}\mathtt{1}\mathtt{0}^\infty)\}.$$

Idée de la preuve du Théorème C ($\Longleftarrow$)

Soit $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ une **paire asymptotique** telle que
leur support des différences F est dans l'intervalle $[\![0, k-1]\!]$.

Lemma

*Soit $\varphi \colon \Sigma \to \Gamma^{+}$ une **substitution** on $\Sigma^{\mathbb{Z}}$.
Si (x, y) est une paire **asymptotique indistinguable**, alors $(\varphi(x), \varphi(y))$ est une paire **asymptotique indistinguable**.*

$$x = \cdots 010010.\boxed{01}0100101\cdots$$

$$y = \cdots 010010.\boxed{10}0100101\cdots$$

Applying $\varphi : 0 \mapsto abc, 1 \mapsto bc$:

$$\varphi(x) = \cdots bcabcbcabcabcbcabc.\boxed{abc}bcabcbcabcabcbcabcbc\cdots$$

$$\varphi(y) = \cdots bcabcbcabcabcbcabc.\boxed{bca}bcabcbcabcabcbcabcbc\cdots$$

Idée de la preuve du Théorème C ($\Longrightarrow$)

Lemma

Suppons que $a \in \Sigma$ apparaît à intervalles bornées dans x.
*Soit $D_a(x)$ la **suite dérivée** de x selon les mots de retour à $a \in \Sigma$.*
*Si (x, y) **indistinguable**, alors $(D_a(x), D_a(y))$ **indistinguable**.*

Les **mots de retour** à la lettre c dans x et y sont *cab* et *cb* :

$$x = \cdots bcabcbcabcabcbcabc.\boxed{abc}bcabcbcabcabcbcabcbc\cdots$$
$$y = \cdots bcabcbcabcabcbcabc.\boxed{bca}bcabcbcabcabcbcabcbc\cdots$$

Remplaçant $cab \mapsto 0$, $cb \mapsto 1$, on obtient les **suites dérivées** :

$$D_c(x) = \cdots 010010.\boxed{01}0100101\cdots$$
$$D_c(y) = \cdots 010010.\boxed{10}0100101\cdots$$

avec un support des différences **plus petit**.

Thermodynamics et Gibbs theory

Gibbsian representations of continuous specifications : the theorems of Kozlov et Sullivan revisited.

S. Barbieri, R. Gómez, B. Marcus, T. Meyerovitch, S. Taati. `arXiv:2001.03880`

They defined the following **norm** on asymptotic configurations of $\Sigma^{\mathbb{Z}}$:

$$\|(x,y)\|^*_{\mathrm{NS}} = \sup_{\substack{S \subseteq \mathbb{Z} \\ S \text{ finite}}} \frac{1}{|S|} \sum_{p \in \Sigma^S} |\Delta_p(x,y)|.$$

- Every asymptotic pair induces an evaluation map on the space of **continuous cocycles** on the equiv. relation of asymptotic pairs.
- They show that this norm coincides with the **dual norm** in the space of linear functionals on the space of continuous cocycles.
- In other words, the asymptotic pairs which induce the null operator are precisely the **indistinguishable pairs**.
- Thus, our results provide a full characterization of which asymptotic pairs induce the **null operator**.

En cours

Nous sommes en train de généraliser le Théorème A à $\mathbb{Z}^d$.

Généraliser le Théorème B et le Théorème C à $\mathbb{Z}^d$ semble demander plus de travail.