Induction de Rauzy de $\mathbb{Z}^2$-rotations sur le tore et partition de Markov

Basé sur l'étude des pavages de Jeandel-Rao (2015)
publié dans 4 articles : GD, DCG, AHL, JMD
+ 1 chapitre : arxiv: 2012.03892

Séminaire Teich
21 janvier 2022

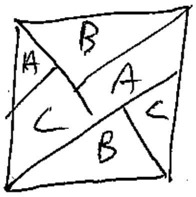
Systèmes dynamiques symboliques (Lind Marcus 95, §6.5)

Hochman chapter 2016, Einsiedler Schmidt 1997

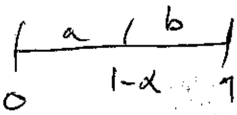
Syst. dyn. $\mathbb{Z}^{2}\xrightarrow{R} M$ sur un espace métrique compact M

Partition topologique $\mathcal{P}=\{P_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ de M (les P_a ouverts t.q. $M=\bigcup_{a\in\mathcal{A}}\overline{P_a}$)

$\boxed{\text{EX1}}$ les automorphismes hyperboliques du tore, $M=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2=\mathbb{T}^2$

$R:\mathbb{Z}\times\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$
$k,x\mapsto \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^k x$ $\quad\mathcal{P}=$ 

$\boxed{\text{EX2}}$ les rotations sur le cercle
$M=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $R: x\mapsto x+\alpha \mod \mathbb{Z}$

$\mathcal{P}=$ 

Soit $S\Subset\mathbb{Z}^2$ support fini, on dit qu'un motif $w\in\mathcal{A}^S$ est permis pour $\mathcal{P},R$ si $\text{CodingRegion}(w)=\bigcap_{k\in S}R^{-k}(P_{w_k})\neq\emptyset$

Langage $\mathcal{L}_{\mathcal{P},R}=\{w\in\mathcal{A}^S \mid w \text{ permis pour } \mathcal{P},R, \text{ et } S\Subset\mathbb{Z}^2\}$

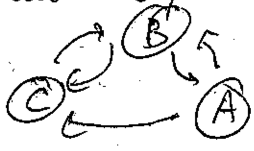
Le syst. dyn. symb. associé à $\mathcal{P},R$ est
$\mathbb{Z}^2\overset{\sigma}{\curvearrowright} X_{\mathcal{P},R}=\{w\in\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}\mid w|_S\in\mathcal{L}_{\mathcal{P},R},\ \forall S\Subset\mathbb{Z}^2\}$

Déf La partition $\mathcal{P}$ donne une représentation symbolique de $\mathbb{Z}^2\xrightarrow{R}M$
si $\forall w\in X_{\mathcal{P},R}$, $f(w)=\bigcap_{k\in\mathbb{Z}}R^{-k}(\overline{P_{w_k}})$ contient exactement un point.

Cela donne lieu à un facteur
$$\begin{tikzcd} X_{\mathcal{P},R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"] & M \arrow[d, "R"] \\ X_{\mathcal{P},R} \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

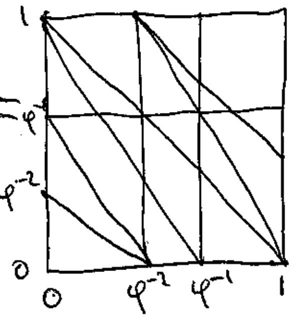
Déf $\mathcal{P}$ est une partition de Markov pour $\mathbb{Z}^2\xrightarrow{R}M$ si
- $\mathcal{P}$ donne une rep. symb. de $\mathbb{Z}^2\xrightarrow{R}M$
- $X_{\mathcal{P},R}$ est un $\mathbb{Z}^2$ SFT

$\boxed{\text{EX1}}$ Les automorphismes du tore admettent des partitions de Markov
Adler-Weiss 1970
Sinai 1968, Bowen 1975



$\boxed{\text{EX2}}$ Non, les sturmiens (codages de rotations irrationnelles) ne sont pas des SFT

$\boxed{\text{Ex}}$ $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^2 \overset{R_u}{\curvearrowright} M$, avec $R_u : \mathbb{Z}^2 \times M \to M$, $\vec{n}, \vec{x} \mapsto \left(\vec{x} + \frac{1}{\varphi^2}\vec{n}\right) \bmod \mathbb{Z}^2$

$\mathcal{P}_u =$ 

<u>Thm</u> (1) $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_u, R_u} = \Omega_u$, un Wang shift défini par 19 tuiles de Wang, apériodique minimal

<u>Corollaire</u>

(2) $\mathcal{P}_u$ est une partition de Markov pour $\mathbb{Z}^2 \overset{R_u}{\curvearrowright} M$

(3) $\mathbb{Z}^2 \overset{R_u}{\curvearrowright} \mathbb{T}^2$ est le facteur équi. maximal de $\mathbb{Z}^2 \overset{\sigma}{\curvearrowright} \Omega_u$

(4) l'ens. des cardinalités des fibres de ce facteur est $\{1, 2, 8\}$

(5) $\mathbb{Z}^2 \overset{\sigma}{\curvearrowright} \Omega_u$ est strictement ergodique avec mesure invariante ν et est isomorphe à $\mathbb{Z}^2 \overset{R_u}{\curvearrowright} \mathbb{T}^2$ avec mesure Lebesgue sur $\mathbb{T}^2$.

<u>Théorème</u> $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_u, R_u}$ est auto-similaire, ie $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_u, R_u} = \beta_0\beta_1\beta_2(\mathcal{X}_{\mathcal{P}_u, R_u})$ où $\beta_0\beta_1\beta_2$ est un morphisme 2-dim. primitif.

Sauter cette partie

<u>Induction de Rauzy de $\mathbb{Z}^2$-rotations</u>

$\mathbb{Z}^2 \overset{R}{\curvearrowright} \mathbb{R}^2/\Gamma$ minimal, Γ réseau dans $\mathbb{R}^2$, $R : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2/\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma$, $\vec{n}, \vec{x} \mapsto \vec{x} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\vec{n}$

<u>Ensemble des temps de retour</u> de $x \in \mathbb{R}^2/\Gamma$ dans $W \subset \mathbb{R}^2/\Gamma$:

$$\delta_W(x) = \{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 : R^{\vec{n}}(x) \in W\}$$

<u>Déf</u> L'action R est <u>cartésienne</u> sur W si

$$\delta_W(x) = r_x^{e_1}(\mathbb{Z}) \times r_x^{e_2}(\mathbb{Z})$$

où $r_x^{e_1}, r_x^{e_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sont strictement croissante et $r_x^{e_i}(a) \geq 0 \iff a \geq 0$

<u>Def</u> le couple $(r_x^{e_1}(1), r_x^{e_2}(1))$ est le <u>temps de retour de x à W</u>.

<u>Lemme</u> Si R est cartésienne sur W, alors

$$\hat{R}|_W : \mathbb{Z}^2 \times W \to W, \quad \vec{n}, \vec{x} \mapsto R^{(r_x^{e_1}(n_1), r_x^{e_2}(n_2))}(x)$$

est une $\mathbb{Z}^2$-action sur W, avec $\vec{n} = (n_1, n_2)$.

C'est la <u>$\mathbb{Z}^2$-action induite</u>.

<u>Partition Induite et substitutions</u> Soit $\mathcal{P} = \{P_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ une partition topologique de $\mathbb{R}^2/\Gamma$.

Return Word : $W \to \mathcal{A}^{*^2}$

$$x \mapsto \left((i,j) \mapsto a \iff R^{(i,j)}(x) \in P_a\right) \quad \begin{matrix} 0 \leq i < r_x^{e_1}(1) \\ 0 \leq j < r_x^{e_2}(1) \end{matrix}$$

Ens des mots de retour : $\mathcal{L} = \text{Return Word}(W) = \{w_b\}_{b \in \mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ alphabet

Partition induite $\hat{\mathcal{P}}|_W = \{\text{Return Word}^{-1}(w_b)\}_{b \in \mathcal{B}} = \{\text{Coding Region}(w_b)\}_{b \in \mathcal{B}}$

Substitution de l'induction de Rauzy : $\omega : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^{*^2}$, $b \mapsto w_b$

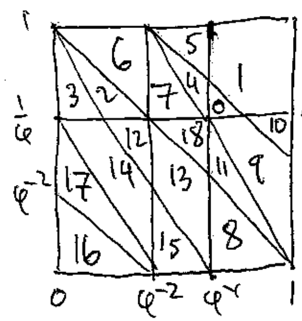
<u>Prop</u> $\mathcal{X}_{\mathcal{P}, R} = \omega(\mathcal{X}_{\hat{\mathcal{P}}|_W, \hat{R}|_W})$

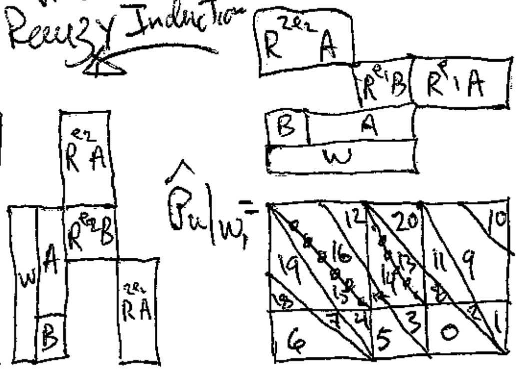
$P_u =$

Vertical Rauzy Induction

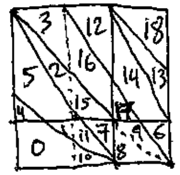
Horizontal Rauzy Induction

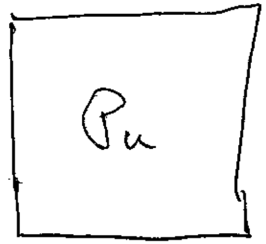
Bijection (homothétie) homeo $x - \varphi^{-1}$





$\hat{P}_u|_{w_2} =$





$\beta_0 : \begin{cases} 8 \leftarrow 0 \\ 9 \leftarrow 1 \\ 11 \leftarrow 2 \\ 13 \leftarrow 3 \\ 14 \leftarrow 4 \\ 15 \leftarrow 5 \\ 16 \leftarrow 6 \\ 17 \leftarrow 7 \\ \binom{0}{8} \leftarrow 8 \\ \binom{1}{9} \leftarrow 9 \\ \binom{1}{10} \leftarrow 10 \\ \binom{1}{11} \leftarrow 11 \\ \binom{6}{12} \leftarrow 12 \\ \binom{4}{13} \leftarrow 13 \\ \binom{7}{13} \leftarrow 14 \\ \binom{2}{14} \leftarrow 15 \\ \binom{6}{14} \leftarrow 16 \\ \binom{7}{15} \leftarrow 17 \\ \binom{3}{16} \leftarrow 18 \\ \binom{3}{17} \leftarrow 19 \\ \binom{5}{18} \leftarrow 20 \end{cases}$

$\beta_1 : \begin{cases} 6 \leftarrow 0 \\ 7 \leftarrow 1 \\ 15 \leftarrow 2 \\ 16 \leftarrow 3 \\ 18 \leftarrow 4 \\ 19 \leftarrow 5 \\ (3,1) \leftarrow 6 \\ (4,0) \leftarrow 7 \\ (5,0) \leftarrow 8 \\ (5,2) \leftarrow 9 \\ (6,0) \leftarrow 10 \\ (7,0) \leftarrow 11 \\ (12,9) \leftarrow 12 \\ (13,9) \leftarrow 13 \\ (14,9) \leftarrow 14 \\ (15,8) \leftarrow 15 \\ (16,11) \leftarrow 16 \\ (17,11) \leftarrow 17 \\ (20,10) \leftarrow 18 \end{cases}$

$\beta_2 : \begin{cases} 1 \leftarrow 0 \\ 0 \leftarrow 1 \\ 9 \leftarrow 2 \\ 6 \leftarrow 3 \\ 11 \leftarrow 4 \\ 10 \leftarrow 5 \\ 8 \leftarrow 6 \\ 7 \leftarrow 7 \\ 3 \leftarrow 8 \\ 5 \leftarrow 9 \\ 4 \leftarrow 10 \\ 2 \leftarrow 11 \\ 17 \leftarrow 12 \\ 16 \leftarrow 13 \\ 14 \leftarrow 14 \\ 12 \leftarrow 15 \\ 18 \leftarrow 16 \\ 13 \leftarrow 17 \\ 15 \leftarrow 18 \end{cases}$

R_u: $+\varphi^{-2}$ (vertical), $+\varphi^{-2}$ (horizontal)

$\hat{R}_u|_{w_1}$: $+\varphi^{-2}$, $-\varphi^{-3}$, mod $\mathbb{Z} \times \frac{1}{\varphi}\mathbb{Z}$

$\hat{R}_u|_{w_2}$: $-\varphi^{-3}$, $-\varphi^{-3}$, mod $\left(\frac{1}{\varphi}\mathbb{Z}\right)^2$

φ^{-2}, φ^{-2}

$W_1 = [0,1] \times [0, \varphi^{-1})$

$W_2 = [0, \varphi^{-1})^2$

$$\mathcal{X}_{P_u, R_u} = \overline{\beta_0\left(\mathcal{X}_{\hat{P}_u|_{w_1}, \hat{R}_u|_{w_1}}\right)}^{\sigma}$$

$$\mathcal{X}_{\hat{P}_u|_{w_1}, \hat{R}_u|_{w_1}} = \overline{\beta_1\left(\mathcal{X}_{\hat{P}_u|_{w_2}, \hat{R}_u|_{w_2}}\right)}^{\sigma}$$

$$\mathcal{X}_{\hat{P}_u|_{w_2}, \hat{R}_u|_{w_2}} = \beta_2\left(\mathcal{X}_{P_u, R_u}\right)$$

Prop $\mathcal{X}_{P_u, R_u} = \overline{\beta_0 \beta_1 \beta_2 (\mathcal{X}_{P_u, R_u})}^{\sigma}$

avec auto-similarité

$\beta_0 \beta_1 \beta_2 : \begin{cases} 0 \to 17, \ 1 \to 16, \\ 2 \to (15, 11), \dots, \\ 18 \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 18 & 8 \end{pmatrix} \end{cases}$

Réf: See arxiv:2012.03892 for details