Pavages apériodiques en dimension 1 : de la combinatoire à la géométrie en passant par l'algèbre

Sébastien Labbé

Petite école de combinatoire
Combinatoire et interactions
LaBRI

19 octobre 2020

Objectif Présenter le pavage de la droite réelle $\mathbb{R}$ associé à la substitution de Fibonacci sous plusieurs angles, pour ensuite faire des liens avec les pavages apériodiques de $\mathbb{R}^2$.

Contenu

Introduction 3 - 4 - 5 - 6
(mots, configurations, morphismes, substitutions, matrice d'incidence, théorème de Perron-Frobenius)

Mot de Fibonacci 7 - 8 - 9 - 10
(substitution géométrique, pavage de $\mathbb{R}$ auto-similaire, schéma de coupe et projection classique x2)

Schéma de coupe et projection naturel 11 - 12 - 13 - 14
(corps de nombres quadratique, plongement de Minkowski, conjugaison algébrique)

Un Mariage avant de passer à $\mathbb{R}^2$ 15

Un BONUS pour Bétréma 16

Le Monoïde libre

$A = \{a, b\}$; alphabet , ε est l'élément neutre de la concaténation

$A^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$: ensemble des mots

Si $w \in A^*$, $|w|_a$ est le nombre d'occurrences de la lettre $a \in A$ dans w

et $\vec{w} = \begin{pmatrix} |w|_a \\ |w|_b \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^2$. Par exemple, $\overrightarrow{aaba} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Configurations et Full shift

$A^{\mathbb{N}} = \{w : \mathbb{N} \to A\}$

Par exemple, $w = (aab)^\infty = \overset{0}{a}\overset{1}{a}\overset{2}{b}\dots aabaabaab\dots$

$A^{\mathbb{Z}} = \{w : \mathbb{Z} \to A\}$

Par exemple, $w = {}^\infty(aab)^\infty = \dots \overset{-3}{a}\overset{-2}{a}\overset{-1}{b}.\overset{0}{a}\overset{1}{a}\overset{2}{b}aabaab\dots$

Morphisme de monoïde

Une fonction $s : A^* \to A^*$ t.q. $s(\varepsilon) = \varepsilon$ et $s(uv) = s(u)s(v)$ $\forall u, v \in A^*$.

Donc définie par l'image des lettres.

Par exemple, $s : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$

$$a \mapsto ab$$
$$b \mapsto a$$

et $s(aaba) = ababaab = s(a)\,s(a)\,s(b)\,s(a)$

Substitution de configurations

Si $s : A^* \to A^*$, alors $s : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$

$$(w_n)_{n\geq 0} \mapsto s(w_0)\cdot s(w_1)\cdot s(w_2)\cdot \ldots$$

et $s : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$

$$(w_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \ldots s(w_{-2})\,s(w_{-1})\,.\,s(w_0)\,s(w_1)\,s(w_2)\ldots$$

Par exemple, $s({}^{\infty}(aab)^{\infty}) = {}^{\infty}(ababa)^{\infty}$

$$= \ldots ababa\;abab\underset{-2}{a}\underset{-1}{.}\,\underset{0}{a}\underset{1}{b}\underset{2}{a}\underset{3}{b}a\;ababa\;ababa\ldots$$

Matrice d'incidence

Soit $s : A^* \to A^*$ un morphisme.

Il existe une unique matrice $M_s \in \mathbb{N}^{|A| \times |A|}$ telle que $\overrightarrow{s(w)} = M_s \cdot \vec{w} \quad \forall w \in A^*$.

Par exemple, si $s : \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{cases}$

alors $\overrightarrow{s(w)} = \begin{pmatrix} |s(w)|_a \\ |s(w)|_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |w|_a + |w|_b \\ |w|_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |w|_a \\ |w|_b \end{pmatrix} = M_s \cdot \vec{w}$

Aussi,

$s^2 : \begin{cases} a \mapsto aba \\ b \mapsto ab \end{cases}$ $\qquad M_{s^2} = (M_s)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$s^3 : \begin{cases} a \mapsto abaab \\ b \mapsto aba \end{cases}$ $\qquad M_{s^3} = (M_s)^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$s^4 : \begin{cases} a \mapsto abaababa \\ b \mapsto abaab \end{cases}$ $\qquad M_{s^4} = (M_s)^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$s^5 : \begin{cases} a \mapsto abaababaabaab \\ b \mapsto abaababa \end{cases}$ $\qquad M_{s^5} = (M_s)^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$s^6 : \begin{cases} a \mapsto abaababaabaababaababa \\ b \mapsto abaababaabaab \end{cases}$ $\qquad M_{s^6} = (M_s)^6 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

Perron (-Frobenius) theorem

Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est positive, $A > 0$,

si $a_{ij} > 0 \ \forall i,j$.

et primitive si $\exists k \in \mathbb{N}$ t.q. $A^k > 0$.

Théorème (Perron) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice primitive de rayon spectral $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, alors λ est une valeur propre simple et dominante de A associée à des vecteurs propres à gauche et à droite strictement positifs.

De plus, $\lim\limits_{k \to \infty} \left(\frac{1}{\lambda} A\right)^k = vu$ si $Av = \lambda v$, $uA = \lambda u$ et $uv = (1)$.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi + 1 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^2 \\ \varphi \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi^2 = \varphi + 1$

$$(\varphi, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\varphi + 1, \varphi) = (\varphi^2, \varphi) = \varphi(\varphi, 1)$$

et $\lim\limits_{k \to \infty} \left[\frac{1}{\varphi} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^k = \frac{1}{\varphi + \varphi^{-1}} \begin{pmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & \varphi^{-1} \end{pmatrix}$

Mot de Fibonacci

$$s : \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l}
s^0(a) & s^0(a) \\
s^1(a) & s^1(a) \\
s^2(a) & s^2(a) \\
s^3(a & s^3(a) \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

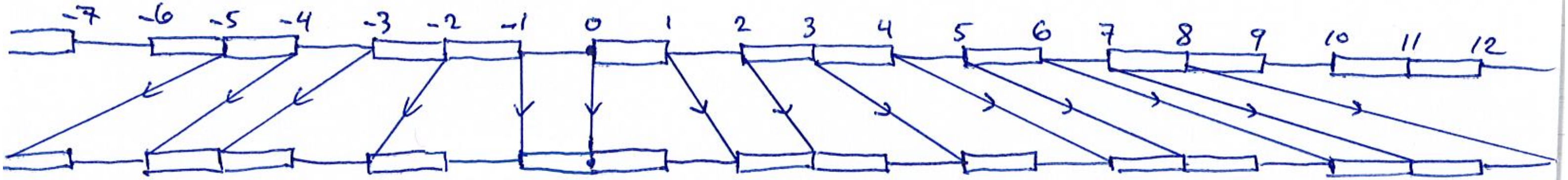
$$\begin{array}{r|l}
a & a \\
ab & ab \\
a\,ba & aba \\
ab\,a\,ab & abaab \\
abaab\,a\,ba & abaababa \\
abaababaaba\,a\,ab & abaababaabaab \\
abaababaabaabaaba\,a\,ba & abaababaabaababaababa \\
\vdots & \cdots \\
\tilde{F}\,ab & F = \\
\tilde{F}\,ba & .F = \lim_{k\to\infty} s^{2k}(a).s^{2k}(a) \\
\tilde{F}\,ab & F = \lim_{k\to\infty} s^{2k+1}(a).s^{2k+1}(a)
\end{array}$$

La fréquence relative des lettres a et b est donnée par le vecteur propre à droite de $M_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre dominante φ.

Question : A quoi correspond le vecteur propre à gauche ?

Substitution géométrique et pavage de $\mathbb{R}$ auto-similaire

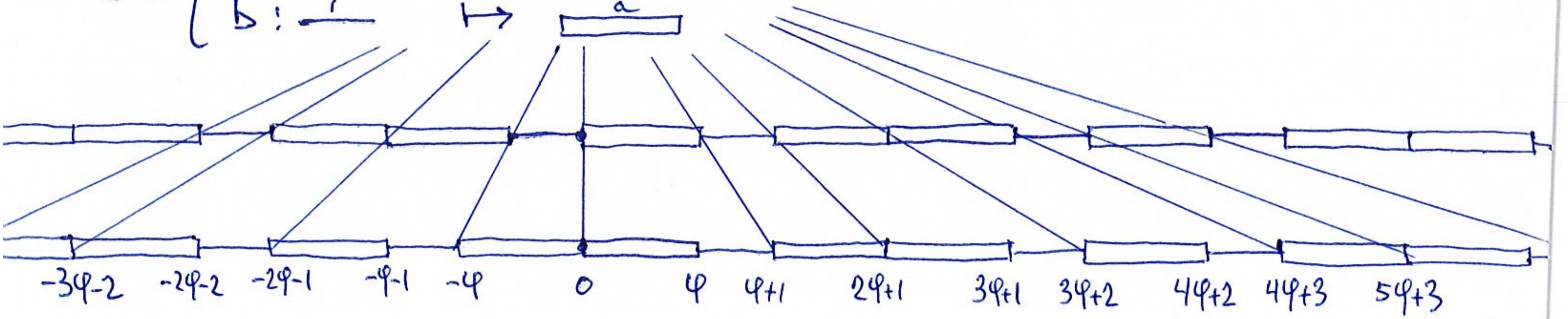
$$S : \begin{cases} a : \overset{1}{\boxed{}} \mapsto \overset{a}{\boxed{}}\overset{b}{\text{——}} \\ b : \overset{1}{\text{——}} \mapsto \overset{a}{\boxed{}} \end{cases}$$



Question : Peut-on trouver des longueurs pour $\overset{a}{\boxed{}}$ et $\overset{b}{\text{——}}$ telles que la longueur de l'image d'un mot soit proportionnelle à sa longueur ?

Réponse : Le vecteur propre à gauche de M_S !

$$S : \begin{cases} a : \overset{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\boxed{}} \mapsto \overset{a}{\boxed{}}\overset{b}{\text{——}} \\ b : \overset{1}{\text{——}} \mapsto \overset{a}{\boxed{}} \end{cases}$$



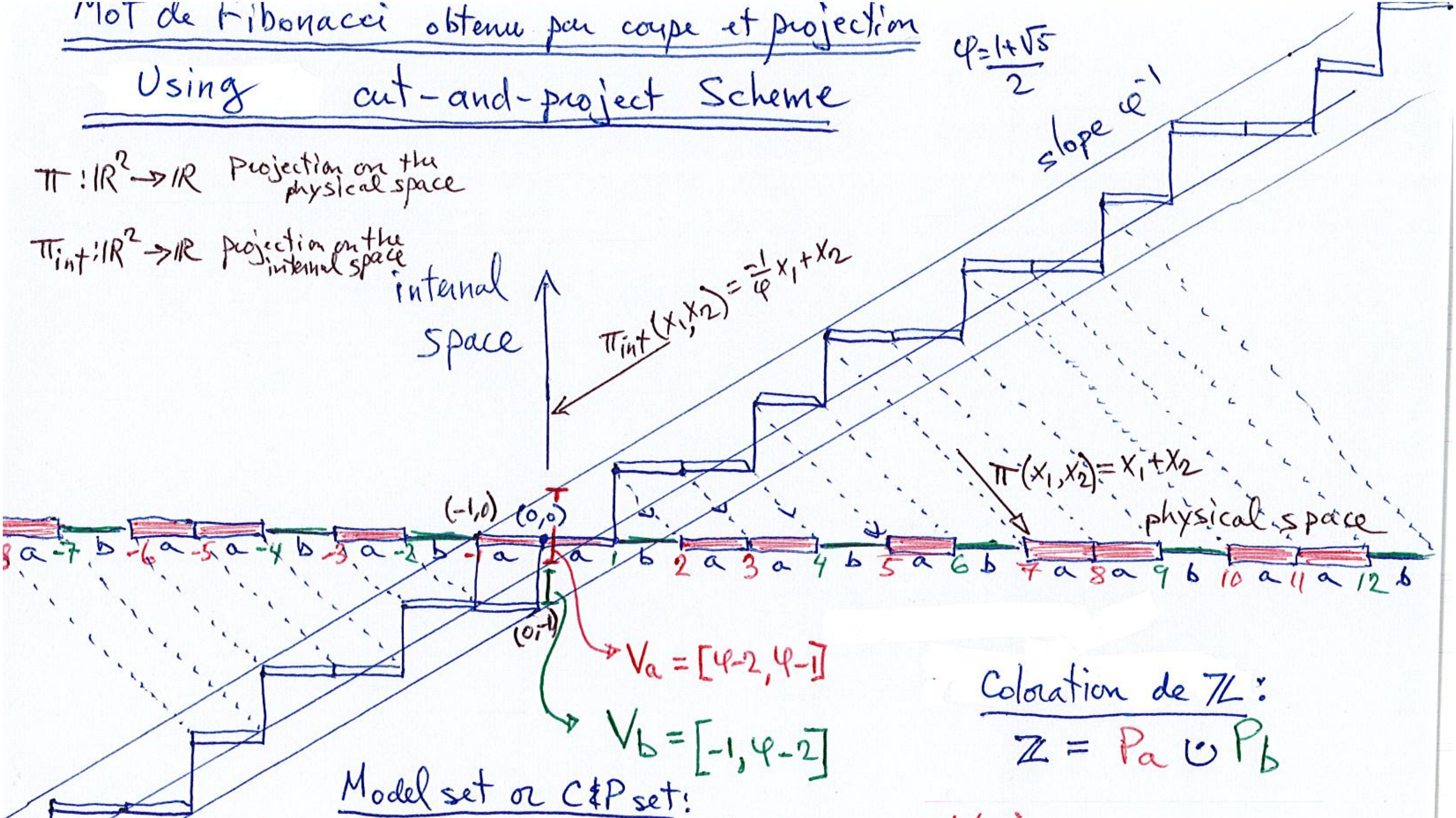
Mot de Fibonacci obtenu par coupe et projection

Using cut-and-project Scheme

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Projection on the physical space

$\pi_{int} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ projection on the internal space



Coloration de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z} = P_a \dot{\cup} P_b$

Model set or C&P set:

$P_a = \{\text{position des } a\} = \pi\left(\mathbb{Z}^2 \cap \pi_{int}^{-1}(V_a)\right)$

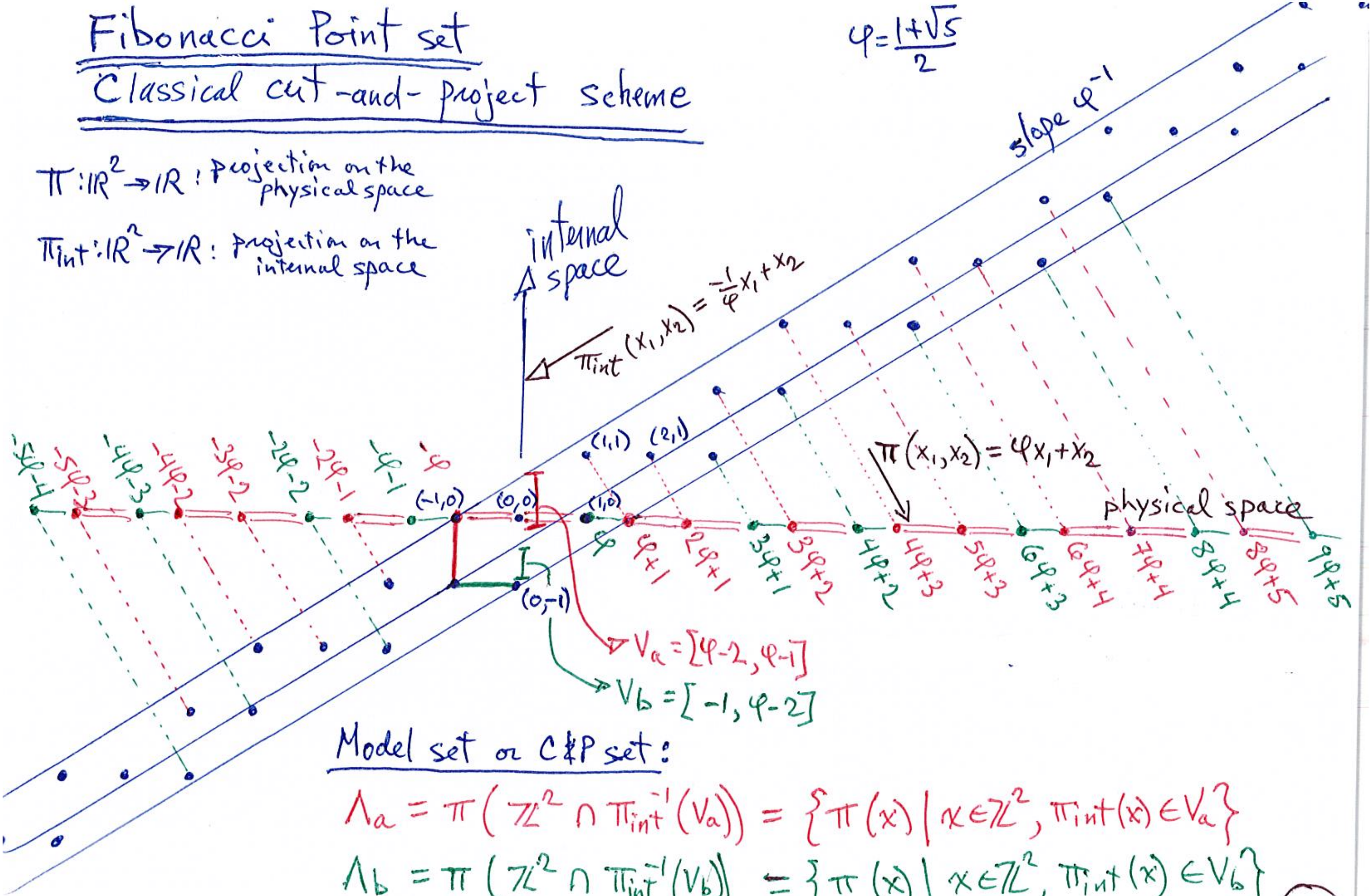
$P_b = \{\text{position des } b\} = \pi\left(\mathbb{Z}^2 \cap \pi_{int}^{-1}(V_b)\right)$

Fibonacci Point set
Classical cut-and-project scheme

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: projection on the physical space

$\pi_{int} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: projection on the internal space



Model set or C&P set:

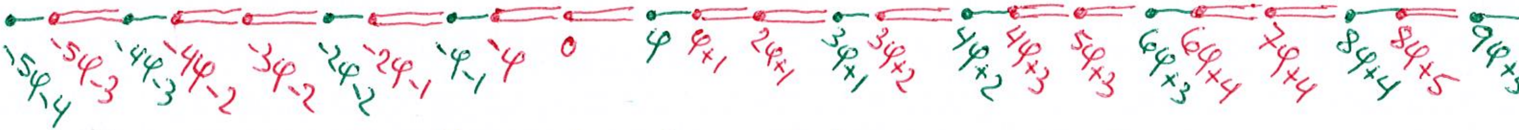
$$\Lambda_a = \pi\left(\mathbb{Z}^2 \cap \pi_{int}^{-1}(V_a)\right) = \{\pi(x) \mid x \in \mathbb{Z}^2, \pi_{int}(x) \in V_a\}$$

$$\Lambda_b = \pi\left(\mathbb{Z}^2 \cap \pi_{int}^{-1}(V_b)\right) = \{\pi(x) \mid x \in \mathbb{Z}^2, \pi_{int}(x) \in V_b\}$$

Ensembles de points dans $\mathbb{R}$

a: φ b: 1

Baake, Grimm
Aperiodic order, 2013



Dans chaque intervalle, on choisit un point pour le représenter.
Par exemple, le point le plus à gauche.

Soit Λ_a, Λ_b les ensembles de points les plus à gauche des intervalles de type a et de type b.

Soit $\Lambda_{ab} = \Lambda_a \cup \Lambda_b$.

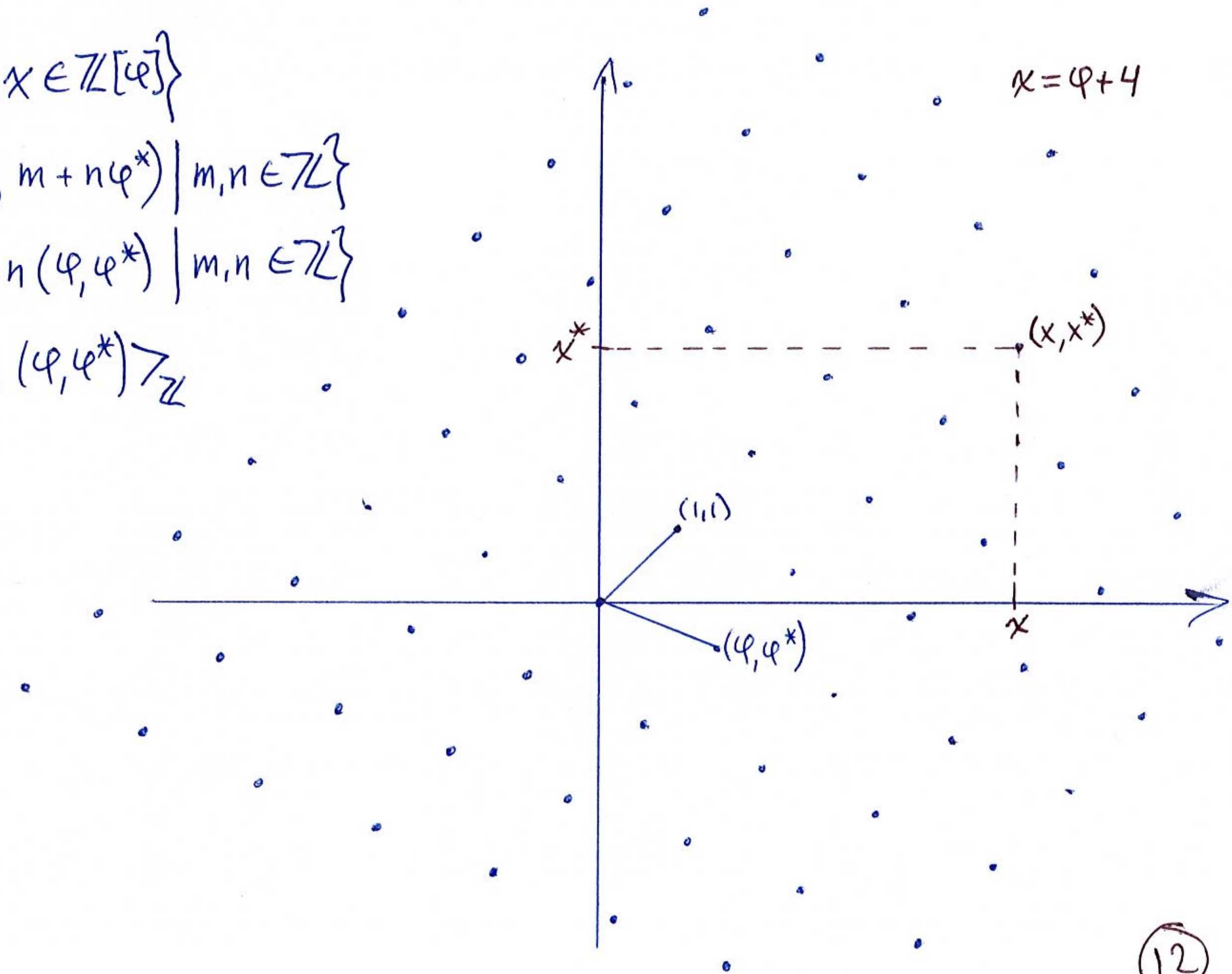
On a $\Lambda_{ab} \subset \underbrace{\mathbb{Z}[\varphi] = \{m+n\varphi \mid m,n\in\mathbb{Z}\}}_{\text{anneau d'entiers}} \subset \mathbb{Q}(\varphi) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ corps de nombres quadratique

<u>Conjugaison algébrique</u> (l'unique automorphisme de corps non-trivial)

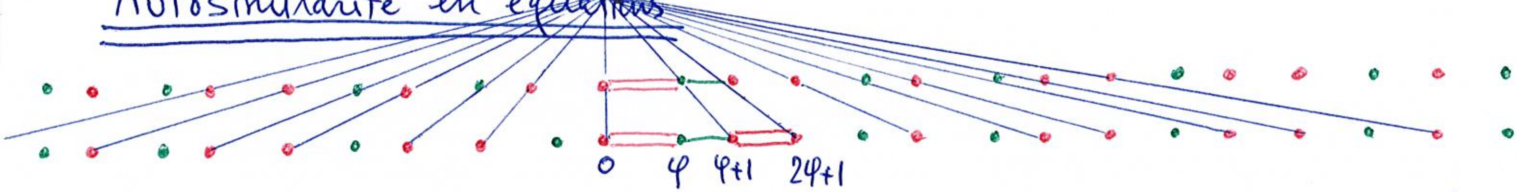
$$\star : \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{5})$$
$$\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$$
$$\varphi \mapsto \varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1-\varphi$$

Plongement de Minkowski de $\mathbb{Z}[\varphi]$ dans $\mathbb{R}^2$: un réseau

$$\mathcal{L} = \{(x, x^*) \mid x \in \mathbb{Z}[\varphi]\}$$
$$= \{(m + n\varphi, m + n\varphi^*) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{m(1,1) + n(\varphi, \varphi^*) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \langle (1,1), (\varphi, \varphi^*) \rangle_{\mathbb{Z}}$$



Autosimilarité en équations



On a $\begin{cases} \Lambda_a = \varphi\Lambda_a \cup \varphi\Lambda_b \\ \Lambda_b = \varphi\Lambda_a + \varphi \end{cases}$ (on néglige les deux points à gauche de l'origine)

On transforme ce système d'équations en passant au conjugué algébrique.

$W_{ab} := \overline{\Lambda_{ab}^*}$ $\qquad W_a := \overline{\Lambda_a^*}$ $\qquad W_b := \overline{\Lambda_b^*}$

On obtient $\begin{cases} W_a = \varphi^* W_a \cup \varphi^* W_b \\ W_b = \varphi^* W_a + \varphi^* \end{cases}$ (IFS-FIBO)

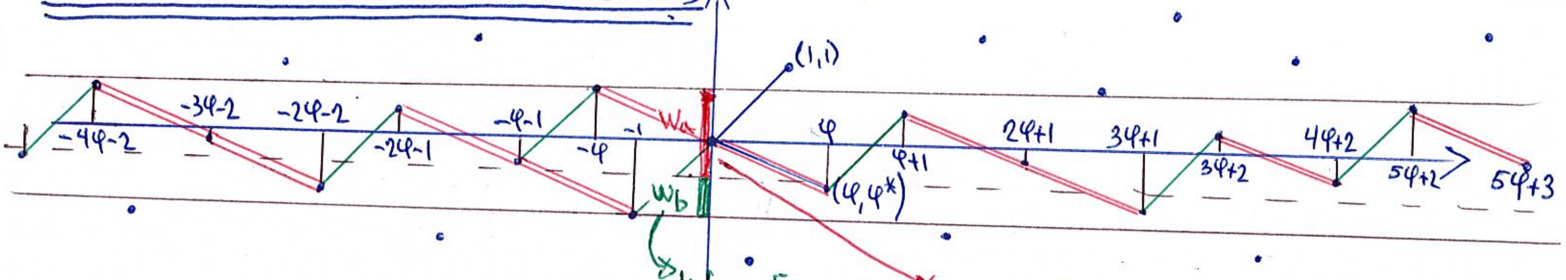
On a $|\varphi^*| < 1$. C'est donc un système de fonctions itérées (IFS) qui est une contraction pour la distance de Hausdorff.

<u>Proposition</u> Le système (IFS-FIBO) possède une unique solution parmi les paires de sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$:

$$W_a = [\varphi-2, \varphi-1] \quad \text{et} \quad W_b = [-1, \varphi-2].$$

<u>Preuve</u> Découle de la théorie de Hutchison (1981). C'est une application du théorème de point-fixe de Banach. $\square$

Natural C&P with Minkowski embedding



$W_b = [-1, \varphi-2]$ $\quad W_a = [\varphi-2, \varphi-1]$ $\quad W_{ab} = W_a \cup W_b = [-1, \varphi-1]$

Theorem

$$\Lambda_{ab} = \{x \in \mathbb{Z}[\varphi] \mid x^* \in W_{ab}\}$$
$$\Lambda_a = \{x \in \mathbb{Z}[\varphi] \mid x^* \in W_a\}$$
$$\Lambda_b = \{x \in \mathbb{Z}[\varphi] \mid x^* \in W_b\}$$

$$\mathcal{L} = \{(x, x^*) \mid x \in L\}$$

Cut and Project Scheme

$$\begin{array}{ccccc}
\text{physical space} & & & & \text{internal space} \\
\mathbb{R} & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \xrightarrow{\pi_{int}} & \mathbb{R} \\
\text{dense} \cup & & \cup & & \cup \text{dense} \\
\mathbb{Z}[\varphi] & \xleftarrow{1-1} & \mathcal{L} & \xrightarrow{1-1} & \mathbb{Z}[\varphi] \\
\| & & & & \| \\
L & & \xrightarrow{\quad * \quad} & & L^*
\end{array}$$

$$x^* := \pi_{int}\left((\pi|_{\mathcal{L}})^{-1}(x)\right)$$

Model set or "Cut and Project Set"

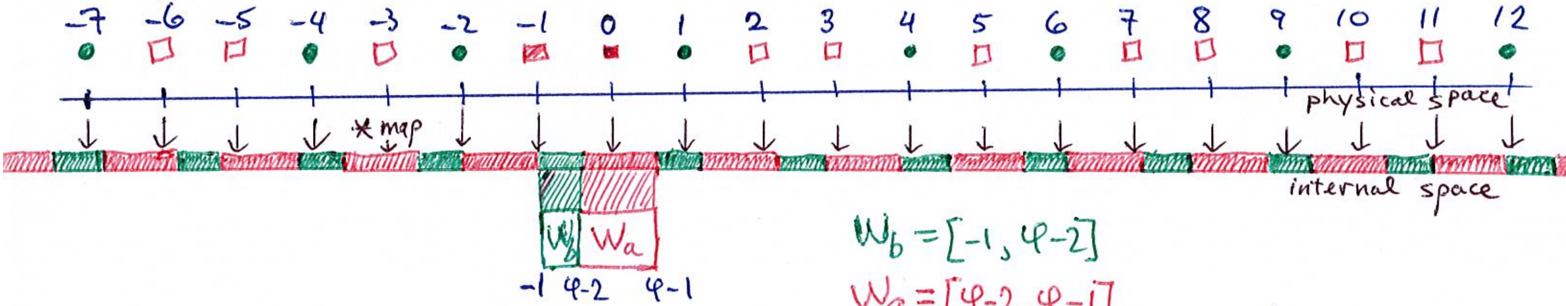
window $W \subset \mathbb{R}$ internal space

$$\Lambda(W) = \{x \in L \mid x^* \in W\}$$

- → Many results (FLC, uniformly discrete, relatively dense, Meyer set) depending on W, diffraction property, ...
- → Many aperiodic tilings (Penrose, Ammann-Beenker, Jeandel-Rao) are model sets

Physical and internal spaces' wedding

Using $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ and $\pi_{int} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/\varphi\mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$



$W_b = [-1, \varphi - 2]$

$W_a = [\varphi - 2, \varphi - 1]$

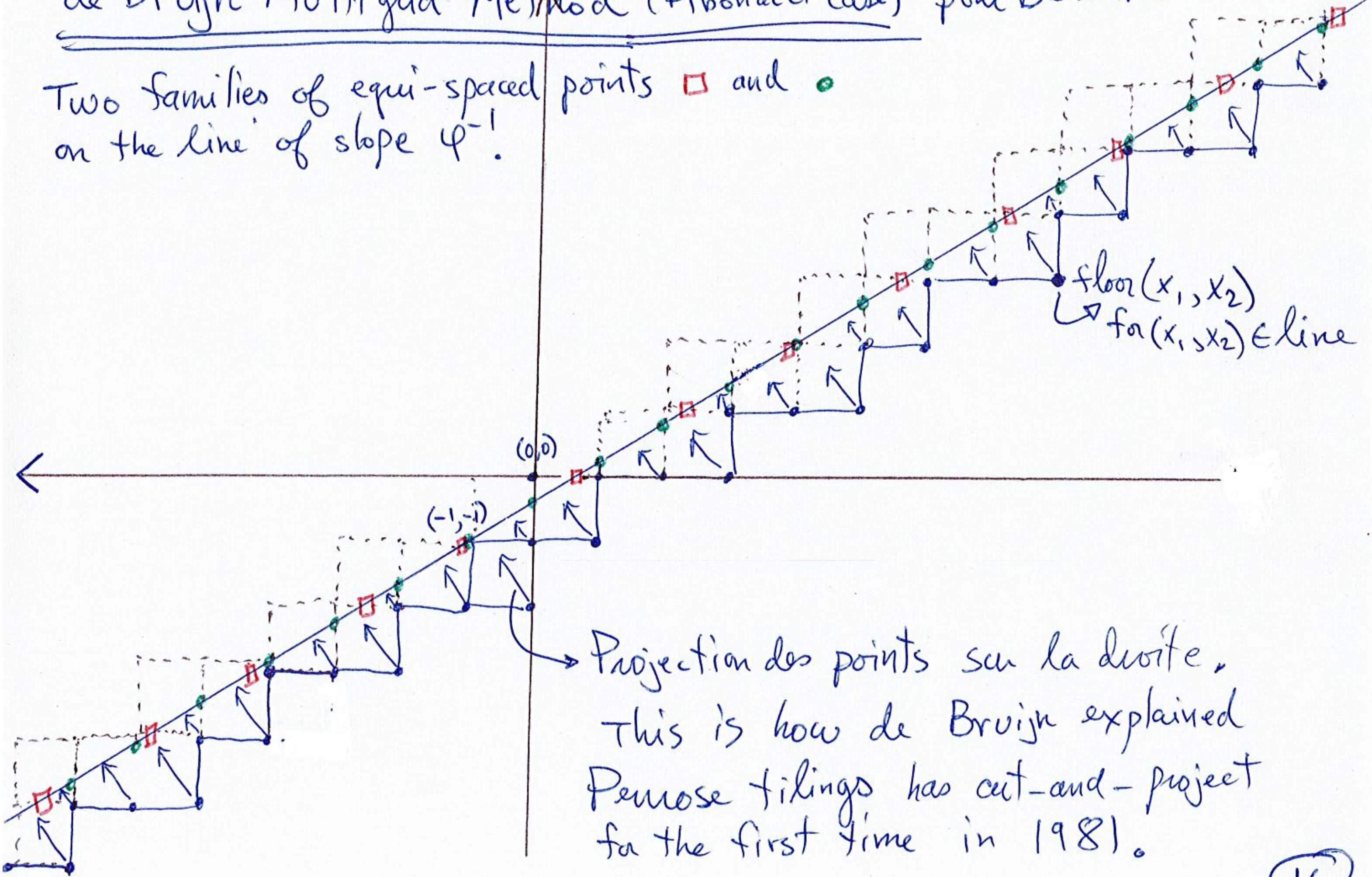
* map

$$* : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/\varphi\mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto x \pmod{\varphi}$$

We may use this construction to explain Jeandel-Rao aperiodic Wang tilings. See arxiv:1903.06137

de Bruijn Multigrid Method (Fibonacci case) pour Bétréma

Two families of equi-spaced points □ and •
on the line of slope φ^{-1}!



Projection des points sur la droite.

This is how de Bruijn explained Penrose tilings has cut-and-project for the first time in 1981.