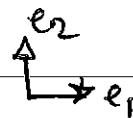


# Structure substitutive des pavages

de Jean-Michel Rao, LaBRI, 21 janvier 2019

## Définitions et Notations

Mots  $\vec{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ ,  $A$  un alphabet



$A^{\vec{n}} = \{ u : [0, n_1-1] \times [0, n_2-1] \rightarrow A \}$  ens. des mots de shape  $\vec{n}$

EX  $u = \begin{pmatrix} u_{0,n_2-1} & \dots & u_{n_1-1,n_2-1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{0,0} & \dots & u_{n_1-1,0} \end{pmatrix} \in A^{\vec{n}}$ ,  $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in A^{(3,2)}$  avec  $A = \{1, \dots, 6\}$

Concaténation Soit  $u \in A^{\vec{n}}$  et  $u' \in A^{\vec{n}'}$

Si  $n_2 = n_2'$ , alors  $u \circ^1 u' = \begin{pmatrix} u & u' \end{pmatrix} \in A^{(n_1+n_1', n_2)}$  est bien définie

Si  $n_1 = n_1'$ , alors  $u \circ^2 u' = \begin{pmatrix} u' \\ u \end{pmatrix} \in A^{(n_1, n_2+n_2')}$  est bien définie

## Morphismes

Soit  $A^{*2} = \{ u \in A^{\vec{n}} \mid \vec{n} \in \mathbb{N}^{2 \times 2} \}$  et  $X \subseteq A^{*2}$

Une fonction  $w : X \rightarrow B^{*2}$  est un morphisme 2-dim si  $\forall i \in \{1, 2\}$

$u, v \in X$  et  $u \circ^i v \in X \Rightarrow w(u) \circ^i w(v)$  est bien définie et  $w(u \circ^i v) = w(u) \circ^i w(v)$

Si  $w : 1 \rightarrow (1, 1)$

$2 \rightarrow (2, 2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ \boxed{2} & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{w} \begin{pmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 22 & 22 & 22 \\ \boxed{22} & 22 & 22 \end{pmatrix}$$

La définition s'étend sur  $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$ ,  $w : X \rightarrow B^{\mathbb{Z}^2}$

$$(1 \ 2) \xrightarrow{w} (11) \begin{pmatrix} 22 \\ 22 \end{pmatrix} \not\leftarrow \text{pas défini}$$

avec l'origine de  $w(u)$  correspondant à l'origine de  $w(u \circ^i)$   $\forall u \in X$ .

Sous-shift Action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $A^{\mathbb{Z}^2}$  :  $\sigma : \mathbb{Z}^2 \times A^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow A^{\mathbb{Z}^2}$

$X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$  est shift-invariant si  $\sigma^{\vec{n}}(x) = x \ \forall \vec{n} \in \mathbb{Z}^2$

$X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$  est un sous-shift s'il est shift-invariant et fermé pour la topologie produit.

Un sous-shift  $X$  est minimal si  $Y \subseteq X$  sous-shift  $\Rightarrow Y = \emptyset$  ou  $Y = X$ .

L'image d'un sous-shift  $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$  par  $w : X \rightarrow B^{\mathbb{Z}^2}$  est.

$$\text{le sous-shift } \overline{w(X)}^\sigma = \{ \sigma^k w(x) \in B^{\mathbb{Z}^2} \mid k \in \mathbb{Z}^2, x \in X \}$$

Le langage de  $X$  est  $\mathcal{L}(X) = \{ u \in A^{*2} \mid u \text{ sous-mot de } x \in X \}$

Auto-similarité

Un sous-shift  $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$  est auto-similaire s'il existe un morphisme 2-dim expansif  $w: A \rightarrow A^{*2}$  t.g.  $X = \overline{w(X)}^o$

Si  $w: A \rightarrow A^{*2}$  est primitive ( $\exists k$  t.g.  $\forall a, b \in A$ ,  $a$  apparaît dans  $w^k(b)$ ) alors  $X_w$  est le plus petit sous-shift  $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$  t.g.  $X = \overline{w(X)}^o$ .

Reconnaissabilité

- Soit  $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$  est  $w: X \rightarrow B^{\mathbb{Z}^2}$  morphisme 2-dim
- Si  $y \in \overline{w(X)}^o$ , alors  $\exists x \in X \exists k \in \mathbb{Z}^2$  t.g.  $y = \sigma^k w(x)$  et on dit que  $(k, x)$  est une w-représentation de  $y$
- Elle est centrée si  $\vec{0} \leq k < \text{SHAPE}(w(x))$   
c-a-d si  $y$  est à l'intérieur de l'image de  $X \vec{0}$ .
- On dit que  $w$  est reconnaissable dans  $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$  si chaque  $y \in B^{\mathbb{Z}^2}$  a au plus une représentation centrée.

**EX**

$w: \begin{cases} a \mapsto aba \\ b \mapsto bab \end{cases}$

$$\begin{aligned} y &= \dots ababab \boxed{a} bab \dots \\ &= \dots \boxed{aba} \boxed{bab} \boxed{aba} \boxed{bab} \dots \\ &= w(a) w(b) w(a) w(b) \end{aligned}$$

mais aussi  $y = \sigma^o \cdot w(\dots ab \cdot abab \dots)$

$$\begin{aligned} &= \dots \boxed{bab} \boxed{aba} \boxed{b} \boxed{a} \boxed{b} \boxed{aba} \dots \\ &= \sigma^{\dots} w(b) w(a) w(b) w(a) \dots \end{aligned}$$

$$y = \sigma^{\vec{a}} \cdot w(\dots ba \cdot ba \dots) = \sigma^{3\vec{k}} \cdot w(\sigma^{-k} x)$$

2 représentations centrées donc  $w$  pas reconnaissable

Lemme 1 Soit  $X = \overline{w(X)}^o$  un sous-shift auto-similaire avec  $w: A \rightarrow A^{*2}$  expansif. Si  $w$  reconnaissable sur  $X$ , alors  $X$  aperiodique.

Lemme 2 Soit  $X, Y$  deux sous-shifts avec  $w: X \rightarrow Y$  reconnaissable sur  $X$ . Si  $X$  est aperiodique, alors  $\overline{w(X)}^o$  est aperiodique.

2 Wang tilings On se rappelle la définition de tuiles et pavages de Wang.

Fusion ~~Soit~~  $W = \begin{bmatrix} X & B \\ A & Y \end{bmatrix}$  ~~et~~  $Z = \begin{bmatrix} W & D \\ C & Z \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} X & B \\ A & Y \end{bmatrix} \stackrel{\#1}{=} \begin{bmatrix} W & D \\ C & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & BD \\ AC & Z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X & B \\ A & Y \end{bmatrix} \stackrel{\#2}{=} \begin{bmatrix} W & D \\ C & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & D \\ X & A \\ Y & Z \end{bmatrix}$$

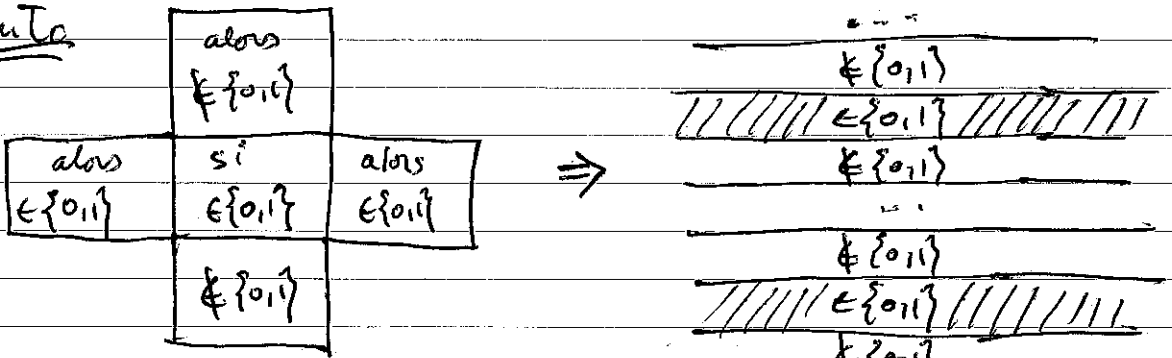
si  $Y=W$  , si  $B=C$

Jeanul-Rao

Soit  $T_0 = \{ \overset{\#0}{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}, \overset{\#1}{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}, \overset{\#2}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}, \dots, \overset{\#10}{\dots} \}$  l'ensemble de Jeanul-Rao.

Soit  $\Omega_0 = \Omega_{T_0} = \{x: \mathbb{Z}^2 \rightarrow T_0 \text{ pavages valides}\}$  le sous-shift associé.

Observations sur  $T_0$

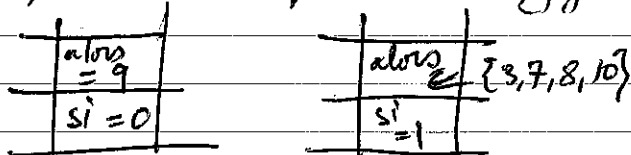


DEF T est tuiles de Wang, un sens  $\neq M \neq T$  est un sens de marqueurs dans la direction  $e_2$  si

$$M \circ^2 M, M \circ^1 (T|M) \text{ et } (T|M) \circ^1 M$$

sont interacts dans  $\Omega_T$ , i.e. ne sont pas dans le langage de  $\Omega_T$ .

Plus d'observations sur  $T_0$ :



$$w: \begin{cases} 0 \rightarrow \binom{9}{0}, 1 \rightarrow \binom{3}{1}, 2 \rightarrow \binom{7}{1}, 3 \rightarrow \binom{8}{1}, 4 \rightarrow \binom{10}{1} \\ 5 \rightarrow 2, 6 \rightarrow 3, 7 \rightarrow 4, 8 \rightarrow 5, 9 \rightarrow 6, 10 \rightarrow 7 \\ 11 \rightarrow 8, \cancel{12 \rightarrow 9}, 12 \rightarrow 10 \end{cases}$$

EX  $M_0 = \{0,1\} \subset T_0$  sont des marqueurs dans la direction  $e_2$  pour JR tiles

Soit  $T$  un ens. de trikos de Wang.

Théorème S'il existe des marqueurs  $M \subset T$  dans la direction  $e_i$ ,  
alors  $\exists$  ens. Wang  $S_L$  et un morphisme 2-dim

$$\omega_L: \Omega_{S_L} \rightarrow \Omega_T$$

t.g.  $\omega_L(S_L) \subseteq (T|M) \cup (M \circ^i (T|M))$

qui est reconnaissable et surjective à shift près

i.e.  $\Omega_T = \overline{\omega_L(\Omega_{S_L})}^\sigma$ .

La substitution  $w$  est de la forme "sturmienne" :  $\begin{cases} u \boxplus^i v \mapsto u \circ^i v \\ u \mapsto u \end{cases}$  ou

- 2 algorithmes : FINDMARKERS  $(T, i, r)$   
FIND SUBSTITUTION  $(T, M, i, r)$

EX  $w: \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 \\ \bar{w} \\ \bar{w} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \mapsto \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ etc.} \end{cases}$

Résumé du résultat (Utiliser l'ordi?)

$$\Omega_0 \xleftarrow{w_0} \Omega_1 \xleftarrow{w_1} \dots \xleftarrow{w_{11}} \Omega_{12} \xrightarrow{w_{12}}$$

- $\Omega_0 = \overline{w_0(\Omega_1)}^\sigma = \overline{w_0 w_1(\Omega_2)}^\sigma = \dots = \overline{w_0 w_1 w_2 w_3(\Omega_4)}^\sigma$
- Quelques soucis entre  $\Omega_4$  et  $\Omega_{10}$ , mais  $w_i$  reconnaissable si  $i \notin \{4, 5\}$
- $\Omega_{10} = \overline{w_{10}(\Omega_7)}^\sigma = \dots$
- $\Omega_{12} = \overline{w_{12}(\Omega_{12})}^\sigma$  est auto-similaire, minimal et aperiodique
- $\Omega_i = X_i$  est aperiodique et minimal  $\forall i, 5 \leq i \leq 11$
- Si  $X_{12} = \Omega_{12}$  et  $X_i = \overline{w_i(X_{i+1})}^\sigma$ , alors  
alors  $X_i \neq \Omega_i$  est aperiodique et minimal  $\forall i, 0 \leq i \leq 4$

Conjecture  $\Omega_i \setminus X_i$  est de mesure 0  $\forall i, 0 \leq i \leq 4$