CENTRE
DE RECHERCHES
MATHÉMATIQUES

Structure substitutive des pavages de Jeandel Rao, LaBRI, 21 janvier 2019

[I] Définitions et Notations

Mots $\vec{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, A un alphabet e_2 e_1

$A^{\vec{n}} = \{ u : [\![0, n_1-1]\!] \times [\![0, n_2-1]\!] \to A \}$ ens. des mots de shape $\vec{n}$

$\boxed{\text{EX}}$ $u = \begin{pmatrix} u_{0,n_2-1} & & u_{n_1-1,n_2-1} \\ \vdots & & \\ u_{0,0} & \cdots & u_{n_1-1,0} \end{pmatrix} \in A^{\vec{n}}$, $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in A^{(3,2)}$ avec $A = \{1, \dots 6\}$

Concaténation Soit $u \in A^{\vec{n}}$ et $u' \in A^{\vec{n}'}$

Si $n_2 = n_2'$, alors $u \odot^1 u' = \left(u \mid u' \right) \in A^{(n_1+n_1', n_2)}$ est bien définie

Si $n_1 = n_1'$, alors $u \odot^2 u' = \left(\dfrac{u'}{u} \right) \in A^{(n_1, n_2+n_2')}$ est bien définie

Morphismes

Soit $A^{*^2} = \{ u \in A^{\vec{n}} \mid \vec{n} \in \mathbb{N}^2 \}$ et $X \subseteq A^{*^2}$.

Une fonction $\omega : X \to B^{*^2}$ est un morphisme 2-dim si $\forall i \in \{1, 2\}$

$u, v \in X$ et $u \odot^i v \in X \Rightarrow \omega(u) \odot^i \omega(v)$ est bien défini et $\omega(u \odot^i v) = \omega(u) \odot^i \omega(v)$

Si $\omega : 1 \to (1, 1)$
$2 \to \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ \boxed{2} & 2 & 2 \end{pmatrix} \xmapsto{\omega} \begin{pmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 22 & 22 & 22 \\ 22 & 22 & 22 \\ \boxed{\begin{smallmatrix} 22 \\ \boxed{2}2 \end{smallmatrix}} & 22 & 22 \end{pmatrix}$$

La définition s'étend sur $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$, $\omega : X \to B^{\mathbb{Z}^2}$

$(1\ 2) \xmapsto{\omega} (1\,1)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ pas défini

avec l'origine de $\omega(u)$ correspondant à l'origine de $\omega(u_{\vec{0}})$ $\forall u \in X$.

Sous-Shift Action de $\mathbb{Z}^d$ sur $A^{\mathbb{Z}^d}$: $\sigma : \mathbb{Z}^d \times A^{\mathbb{Z}^d} \to A^{\mathbb{Z}^2}$
$\vec{n} \times (u_m)_{m \in \mathbb{Z}^2} \mapsto (u_{m+n})_{m \in \mathbb{Z}^2}$

$X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$ est shift-invariant si $\sigma^{\vec{n}}(X) = X$ $\forall \vec{n} \in \mathbb{Z}^2$

$X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$ est un sous-shift s'il est shift-invariant et fermé pour la topologie produit.

Un sous-shift X est minimal si $Y \subseteq X$ sous-shift $\Rightarrow Y = \emptyset$ ou $Y = X$.

L'image d'un sous-shift $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$ par $\omega : X \to B^{\mathbb{Z}^2}$ est le sous-shift $\overline{\omega(X)}^{\sigma} = \{ \sigma^k \omega(x) \in B^{\mathbb{Z}^2} \mid k \in \mathbb{Z}^2, x \in X \}$

Le langage de X est $\mathcal{L}(X) = \{ u \in A^{*^2} \mid u \text{ sous-mot de } x \in X \}$

Auto-similarité

Un sous-shift $X \subset A^{\mathbb{Z}^2}$ est <u>auto-similaire</u> s'il existe un morphisme 2-dim expansif $\omega : A \to A^{*^2}$ t.q.

$$X = \overline{\omega(X)}^{\sigma}$$

Si $\omega : A \to A^{*^2}$ est <u>primitive</u> ($\exists k$ t.q. $\forall a,b \in A$, a apparaît dans $\omega^k(b)$) alors X_ω est le plus petit sous-shift $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$ t.q. $X = \overline{\omega(X)}^{\sigma}$.

Reconnaissabilité

- Soit $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$ est $\omega : X \to B^{\mathbb{Z}^2}$ morphisme 2-dim
- Si $y \in \overline{\omega(X)}^{\sigma}$, alors $\exists x \in X\ \exists k \in \mathbb{Z}^2$ t.q. $y = \sigma^k \omega(x)$ et on dit que (k,x) est une <u>ω-représentation</u> de y
- Elle est <u>centrée</u> si $\vec{0} \le k < SHAPE(\omega(x_{\vec{0}}))$
  c-a-d si $y_{\vec{0}}$ est à l'intérieur de l'image de $x_{\vec{0}}$.
- On dit que ω est <u>reconnaissable dans X</u> $\subseteq A^{\mathbb{Z}^2}$ si chaque $y \in B^{\mathbb{Z}^2}$ a au plus une représentation centrée.

$\boxed{EX}$ $\omega : \begin{cases} a \mapsto aba \\ b \mapsto bab \end{cases}$

$$y = \cdots ababab.\boxed{a}bab\cdots = \cdots \boxed{aba}\boxed{bab}.\boxed{aba}\boxed{bab}\cdots = \omega(a)\,\omega(b).\omega(a)\,\omega(b)$$

$$y = \sigma^0 \cdot \omega(\ldots ab.abab\ldots)$$

Mais aussi $= \cdots \boxed{bab}\boxed{aba}\boxed{b.\boxed{a}b}\boxed{aba}\cdots = \sigma\cdots\omega(b)\,\omega(a).\omega(b)\,\omega(a)\cdots$

$$y = \sigma^1 \cdot \omega(\cdots ba.ba\ldots)$$

$$= \sigma^{3k} \cdot \omega(\sigma^{-k} x)$$, pas centré si $k \neq 0$

2 représentations centrées donc ω pas reconnaissable

<u>Lemme 1</u> Soit $X = \overline{\omega(X)}^{\sigma}$ un sous-shift auto-similaire avec $\omega : A \to A^{*^2}$ expansif. Si ω reconnaissable sur X, alors X apériodique.

<u>Lemme 2</u> Soit X, Y deux sous-shifts avec $\omega : X \to Y$ reconnaissable sur X. Si X est apériodique, alors $\overline{\omega(X)}^{\sigma}$ est apériodique.

$\boxed{2}$ Wang tilings

On se rappelle la définition de tuiles et pavages de Wang.

Fusion

$$\boxed{\begin{smallmatrix} & B & \\ X & & Y \\ & A & \end{smallmatrix}} \boxminus^1 \boxed{\begin{smallmatrix} & D & \\ W & & Z \\ & C & \end{smallmatrix}} = \boxed{\begin{smallmatrix} & BD & \\ X & & Z \\ & AC & \end{smallmatrix}} \quad \text{si } Y=W, \qquad \boxed{\begin{smallmatrix} & B & \\ X & & Y \\ & A & \end{smallmatrix}} \boxminus^2 \boxed{\begin{smallmatrix} & D & \\ W & & Z \\ & C & \end{smallmatrix}} = \boxed{\begin{smallmatrix} & D & \\ W\,X & & Z\,Y \\ & A & \end{smallmatrix}} \quad \text{si } B=C$$

Jeandel-Rao

Soit $\mathcal{T}_0 = \left\{ \overset{\#0}{\boxed{\begin{smallmatrix} & 4 & \\ 2 & & 2 \\ & 1 & \end{smallmatrix}}}, \overset{\#1}{\boxed{\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 2 & & 2 \\ & 0 & \end{smallmatrix}}}, \overset{\#2}{\boxed{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 3 & & 1 \\ & 1 & \end{smallmatrix}}}, \ldots, \overset{\#10}{} \right\}$ l'ensemble de Jeandel-Rao.

Soit $\Omega_0 = \Omega_{\mathcal{T}_0} = \{x: \mathbb{Z}^2 \to \mathcal{T}_0 \text{ pavages valides}\}$ le sous-shift associé.

Observations sur $\mathcal{T}_0$

	alors $\notin\{0,1\}$	
alors $\in\{0,1\}$	si $\in\{0,1\}$	alors $\in\{0,1\}$
	$\notin\{0,1\}$	

$\Rightarrow$

...
$\notin\{0,1\}$
$\in\{0,1\}$
$\notin\{0,1\}$
...
$\notin\{0,1\}$
$\in\{0,1\}$
$\notin\{0,1\}$
...

$\boxed{\text{DEF}}$ $\mathcal{T}$ ens tuiles de Wang, un s/ens $\emptyset \neq M \subsetneq \mathcal{T}$ est un s/ens de marqueurs dans la direction e_2 si

$$M \odot^2 M, \quad M \odot^1 (\mathcal{T} \setminus M) \text{ et } (\mathcal{T} \setminus M) \odot^1 M$$

sont interdits dans $\Omega_{\mathcal{T}}$, i.e. ne sont pas dans le langage de $\Omega_{\mathcal{T}}$.

Plus d'observations sur $\mathcal{T}_0$:

alors $=9$
si $=0$

alors $\in\{3,7,8,10\}$
si $=1$

$$w: \begin{cases} 0 \to \binom{9}{0}, & 1 \to \binom{3}{1}, \quad 2 \to \binom{7}{1}, \quad 3 \to \binom{8}{1}, \quad 4 \to \binom{10}{1} \\ 5 \to 2, & 6 \to 3, \quad 7 \to 4, \quad 8 \to 5, \quad 9 \to 6, \quad 10 \to 7 \\ 11 \to 8, & \cancel{12 \to 9}, \quad 12 \to 10 \end{cases}$$

$\boxed{\text{EX}}$ $M_0 = \{0,1\} \subset \mathcal{T}_0$ sont des marqueurs dans la direction e_2 pour JR tiles

Soit T un ens. de tuiles de Wang.

<u>Théorème</u> S'il existe des marqueurs $M \subset T$ dans la direction e_i, alors $\exists$ ens. Wang S_L et un morphisme 2-dim

$$\omega_L : \Omega_{S_L} \to \Omega_T$$

t.q. $\omega_L(S_L) \subseteq (T|M) \cup (M \odot^i (T|M))$

qui est reconnaissable et surjective à shift près

i.e. $\Omega_T = \overline{\omega_L(\Omega_{S_L})}^{\sigma}$.

~~EX~~

- ~~La~~ substitution ω est de la forme "sturmienne" : $\begin{cases} u \boxminus^i v \mapsto u \odot^i v \\ u \mapsto u \end{cases}$ ou
- 2 algorithmes : FINDMARKERS(T, i, r)
  FINDSUBSTITUTION(T, M, i, r)

$\boxed{EX}$ $\omega : \left\{ \boxed{\begin{smallmatrix} & 2 & \\ \tilde{v} & & \tilde{v} \\ & 1 & \end{smallmatrix}} = 0 \mapsto \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 4 & \\ 2 & 4 & 2 \\ & 1 & \end{smallmatrix}} \right.$, etc.

$\boxed{\text{Résumé du résultat}}$ (Utiliser l'ordi ?)

$$\Omega_0 \xleftarrow{\omega_0} \Omega_1 \xleftarrow{\omega_1} \cdots \xleftarrow{\omega_{11}} \Omega_{12} \circlearrowleft \omega_{12}$$

- $\Omega_0 = \overline{\omega_0(\Omega_1)}^{\sigma} = \overline{\omega_0 \omega_1(\Omega_2)}^{\sigma} = \cdots = \overline{\omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3(\Omega_4)}^{\sigma}$
- Quelques soucis entre Ω_4 et Ω_6, mais ω_i reconnaissable si $i \notin \{4,5\}$
- $\Omega_6 = \overline{\omega_6(\Omega_7)}^{\sigma} = \cdots$
- $\Omega_{12} = \overline{\omega_{12}(\Omega_{12})}^{\sigma}$ est auto-similaire, minimal et apériodique
- $\Omega_i = X_i$ est apériodique et minimal $\forall i$, $5 \le i \le 11$
- Si $X_{12} = \Omega_{12}$ et $X_i = \overline{\omega_i(X_{i+1})}^{\sigma}$, alors
  alors $X_i \subsetneq \Omega_i$ est apériodique et minimal $\forall i$, $0 \le i \le 4$

<u>Conjecture</u> $\Omega_i \setminus X_i$ est de mesure 0 $\forall i$ $0 \le i \le 4$