LaBRI, 7 janv 2019
S. Labbé

Sturmiens et codages de rotations

Références : • Morse, Hedlund 1930, Coven Hedlund 1970
• Lothaire, chap 2, 2002 • Pytheas Fogg, chap 6, 2002
• Thuswaldner 2019

$\boxed{1}$ Sturmiens

$\boxed{\text{EX}}$ Fibonacci

$\varphi \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{cases}$

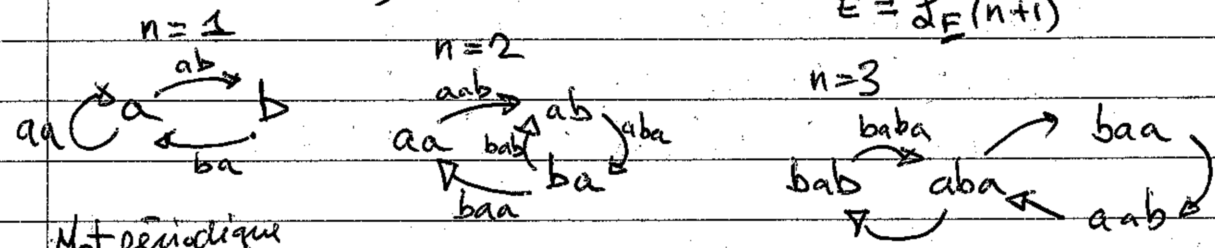
a
ab ab
aba aba
abaab abaab
abaababa abaababa
abaababaabaab

$\underline{F} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(a) \in \{a,b\}^{\mathbb{N}}$

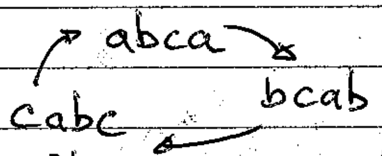
Facteurs

n	$\mathcal{L}_F(n)$	$P_F(n) = \#\mathcal{L}_F(n)$
1	$\{a,b\}$	2
2	$\{ab, ba, aa\}$	3
3	$\{aba, baa, aab, bab\}$	4
n	...	$n+1$

Graphe de Rauzy niveau n (V,E) où $V = \mathcal{L}_F(n)$
$E = \mathcal{L}_F(n+1)$



Mot périodique
$\underline{W} = (abc)^\infty$ $n=4$



Remarques
Un Graphe connexe n sommets $n-1$ arêtes est un ~~graphe~~ arbre
n sommets n arêtes est un cycle avec branches

Lemme Soit $\underline{W} \in \{a,b\}^{\mathbb{N}}$, si $\exists n$ t.q. $p_{\underline{W}}(n) \leq n$, alors $\underline{W}$ est ult. périodique

Preuve Soit $N = \min\{n \mid p_{\underline{W}}(n) \leq n\}$. $N \geq 1$, car $p_{\underline{W}}(0) = 1$
Donc $p(N-1) \geq N$ et $p(N) \leq N$ $\Rightarrow p(N-1) = p(N) = N$
Soit (V,E) graphe de Rauzy de $\underline{W}$ de niveau $N-1$.
On a $|V| = N$ et $|E| = N$.
Un chemin infini dans ce graphe termine dans un cycle. □

Def Un mot sturmien est un mot $\underline{W} \in \{a,b\}^{\mathbb{N}}$ de complexité $p_W(n) = n+1$
~~ou un mot $\underline{W} \in \{a,b\}^{\mathbb{Z}}$ de complexité $p_W(n) = n+1$~~
et pas ult. périodique

$\boxed{\text{EX}}$ Fibonacci

2 Rotations

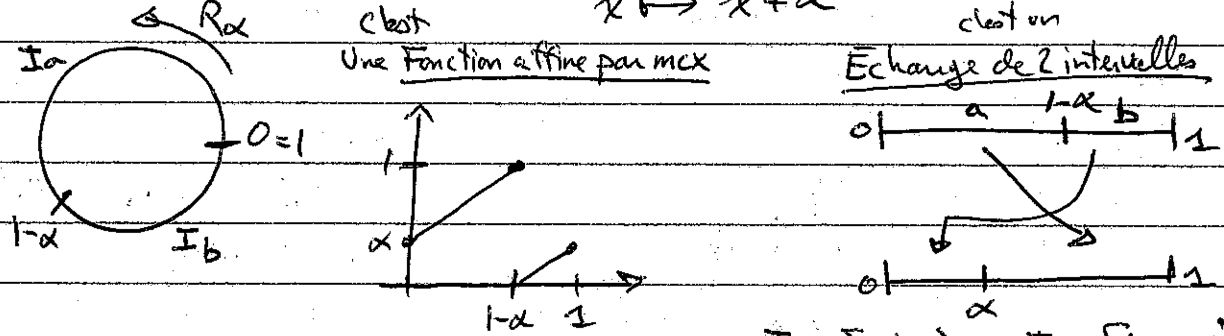
Def $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong [0,1]$ avec 0 et 1 identifiés

Une rotation ou translation par un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ est une fonction $R_\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

$x \mapsto x + \alpha$

c'est une Fonction affine par mcx

c'est un Echange de 2 intervalles



$I_a = [0, 1-\alpha)$ $\quad I_b = [1-\alpha, 1)$

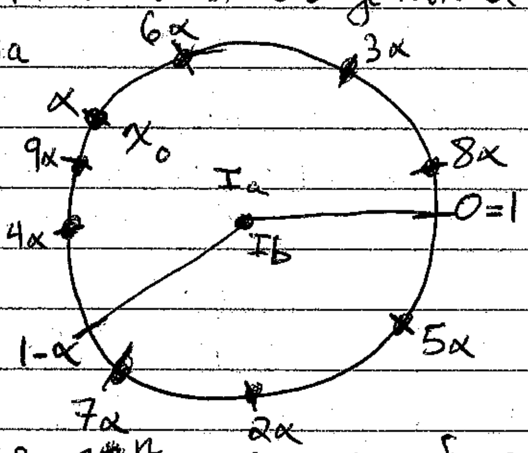
$I_a' = (0, 1-\alpha]$ $\quad I_b' = (1-\alpha, 1]$

Def Une suite $\underline{w} = (w_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \{a,b\}^{\mathbb{Z}}$ est un codage naturel de R_α s'il existe $x_0 \in \mathbb{T}$ t.q.

$$\text{ou } \begin{cases} w_k = i \iff R_\alpha^k(x_0) \in I_i & \forall k \in \mathbb{Z} \\ w_k = i \iff R_\alpha^k(x_0) \in I_i' & \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

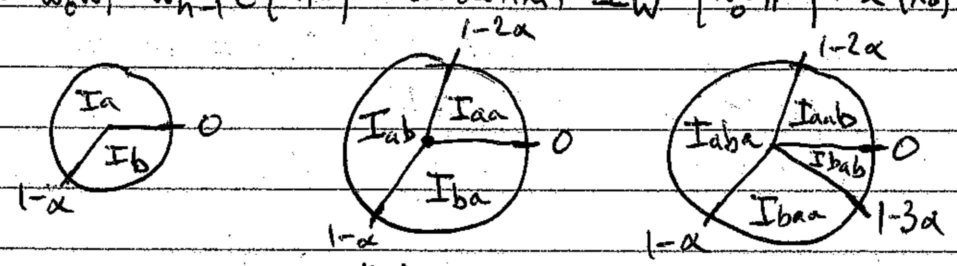
EX Le mot de Fibonacci est le codage naturel de R_α avec $\alpha = \frac{1}{\varphi^2} = x_0$ et $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\alpha = 1/\varphi^2 \approx 0{,}38$	a
$2\alpha \approx 0{,}76$	b
$3\alpha \approx 0{,}14$	a
$4\alpha \approx 0{,}52$	a
$5\alpha \approx 0{,}90$	b
$6\alpha \approx 0{,}29$	a
$7\alpha \approx 0{,}67$	b
$8\alpha \approx 0{,}05$	a
$9\alpha \approx 0{,}43$	a



~~0 1 2 3 4 5 6 7~~

$\forall w = w_0 w_1 \cdots w_{n-1} \in \{a,b\}^n$ on définit $I_w = \left\{ x_0 \in \mathbb{T} \;\middle|\; R_\alpha^k(x_0) \in I_{w_k} \ \forall k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$



Lemme $I_w = \bigcap_{k=0}^{n-1} R_\alpha^{-k} I_{w_k}$

Théorème Une suite $\underline{w} \in \{a,b\}^{\mathbb{N}}$ est un mot sturmien $\iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ t.q. $\underline{w}$ est un codage naturel de R_α

Note : ok si $\underline{w} \in \{a,b\}^{\mathbb{Z}}$, mais il faut éviter le cas ...aaabbb....

3 Preuve de ($\Leftarrow$), le côté facile

On considère la partition $\Pi = \bigsqcup_{w \in \{a,b\}^n} I_w$

On a $I_w \neq \emptyset \iff w \in \mathcal{L}(\underline{w})$ car α est irrationel

Exactement $n+1$ des ensembles I_w sont non vides.

Donc $\underline{W}$ est sturmien.

4a Preuve de ($\Rightarrow$) : Structure substitutive des mots sturmiens

Soit $\underline{w} \in \{a,b\}^{\mathbb{Z}}$ un mot de complexité $p_{\underline{w}}(n) = n+1$

En particulier $p_{\underline{w}}(2) = 3$.

Et $\mathcal{L}_{\underline{w}}(2) = \underbrace{\{ab, ba, aa\}}_{(\text{type } a)}$ ou $\underbrace{\{ab, ba, bb\}}_{(\text{type } b)}$

Si type a, tous les b sont suivis et précédés d'un a.

On peut donc factoriser ~~le~~ mot sur $\{ab, a\}$ ou $\{ba, a\}$

Soit $\tau_a \begin{cases} a \to ab \\ b \to a \end{cases}$ $\exists!\, \underline{w}' \in \{a,b\}^{\mathbb{Z}}$ t.q. $\underline{w} = \begin{cases} \tau_a(\underline{w}') & \text{ou} \\ \sigma \circ \tau_a(\underline{w}') \end{cases}$

où σ = shift = décalage à gauche.

Si type b $\hat{M}$ principe avec $\tau_b : \begin{cases} a \to b \\ b \to ba \end{cases}$

Pas trivial du tout : $\underline{W}'$ est sturmien

Preuve basée sur la notion d'équilibre une déf. équiv. des sturmiens et sur le fait que $\underline{W}$ pas équilibré $\Rightarrow \tau_a(\underline{w})$ pas équilibré

On obtient la structure substitive de $\underline{w}$:

$\forall\, \underline{w}$ sturmien $\exists\, (k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $k_n \in \{0,1\}$, $\exists\, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $c_n \in \{a,b\}$, $\exists\, x_n, y_n \in \{a,b\}$

$$\underline{w} = \lim_{n \to \infty} (\sigma^{k_0} \tau_{c_0})(\sigma^{k_1} \tau_{c_1}) \cdots (\sigma^{k_n} \tau_{c_n})(x_n . y_n)$$

aussi parfois écrit de façon multiplicative

$\forall\, \underline{w}$ sturmien $\exists\, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $0 \leq b_n < a_n$ t.q.

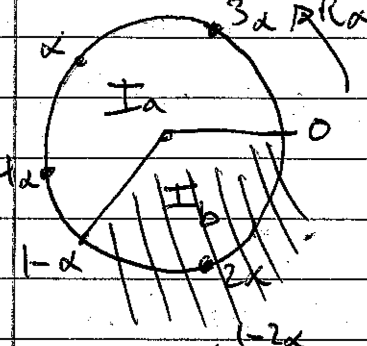
$$\underline{w} = \lim_{n \to \infty} (\sigma^{b_0} \tau_a^{a_0}) \circ (\sigma^{b_1} \circ \tau_b^{a_1}) \circ \cdots \circ (\sigma^{b_{2n}} \circ \tau_a^{a_{2n}})$$

où $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ est le dev. en f.c. de la pente α et (b_n) est l'écriture de x_0 dans le syst. num. d'Ostrowski en α.

4b Structure substitutive des codage de rotations

Soit $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ et $\underline{W} \in \{a,b\}^{\mathbb{N}}$ le codage naturel de R_α depuis $x_0 \in \mathbb{R}$

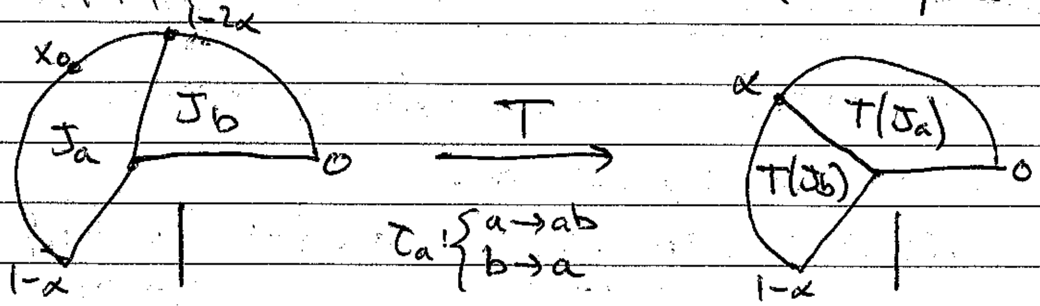
On fait les dessins avec $\alpha = x_0 = \frac{1}{\varphi^2}$ et $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



Transformation induite ou fct de premier retour de la rotation R_α sur le gros intervalle. (I_a si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, I_b si $\alpha > \frac{1}{2}$)

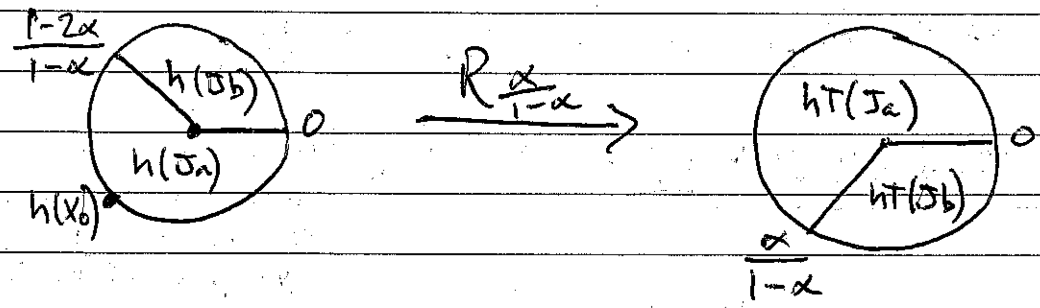
$$T : I_a \longrightarrow I_a$$
$$x \longmapsto R_\alpha^{k_\alpha(x)}(x)$$

où $k_\alpha(x) = \min\{k>0 \mid R_\alpha^{k}(x) \in I_a\}$



On a $\underline{W} = \begin{cases} \tau_a(\underline{W}') & \text{si } x_0 \in I_a \text{ où } \underline{W}' \text{ est le codage de l'orbite de } x_0 \text{ par } T \text{ selon } J_a \text{ et } J_b \\ \sigma\tau_a(\underline{W}') & \text{si } x_0 \in I_b \text{ où } \text{— " — } (x_0-\alpha) \text{ — " —} \end{cases}$

$$h : [0, 1-\alpha] \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1-\alpha}$$



Donc $\underline{W}'$ est le codage naturel de $R_{f(\alpha)}$ avec $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & \text{si } x > \frac{1}{2} \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

On peut répéter le processus. On obtient

$$\underline{W} = \lim_{n \to \infty} (\sigma^{k_0} \circ \tau_{c_0}) \circ (\sigma^{k_1} \circ \tau_{c_1}) \circ \dots \circ (\sigma^{k_n} \circ \tau_{c_n}) \, (x_n . y_n)$$

Donc tout mot sturmien est un codage de rotation. $\square$

__Remarque :__ si $\alpha = \frac{1}{\varphi^2}$, alors $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{\varphi}$ et $f^2(\alpha) = \alpha$. $F = \tau_a \tau_a(F)$ donc le mot Fibo est auto-similaire.

__Corollaire__ Un système dyn. symbolique (X, σ, μ) est conjugué en mesure à une rotation irrationnelle $(\mathbb{T}, R_\alpha, \lambda)$ où μ est l'unique mesure σ-invariante sur X et λ est la mesure de Haar sur $\mathbb{T}$.