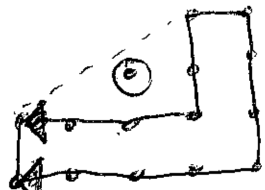
Géométrie digitale, fractions continues et Combinatoire

Bordeaux
2 juin 2017

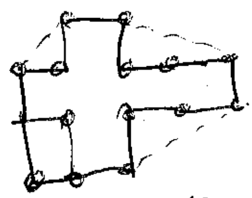
① Géo. digitale

→ cherche à adapter la géométrie euclidienne à $\mathbb{Z}^d$
~~mène à~~ algorithmes efficaces

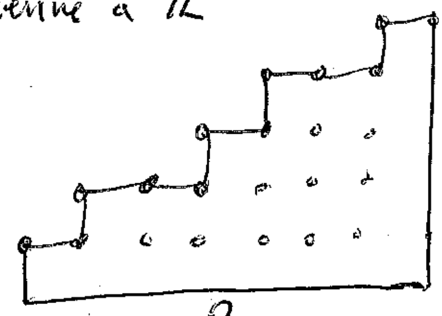
$\boxed{\text{EX}}$



dig. concave



dig. convexe

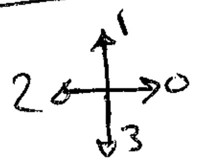


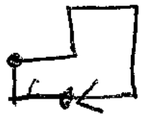
?

$\boxed{\text{DEF}}$ $P \subseteq \mathbb{Z}^d$ est digitalement convexe si

$$P \subseteq \mathrm{ENVCONV}_{\mathbb{R}^d}(P) \cap \mathbb{Z}^d \subseteq P .$$

② ~~Combinatoire des mots~~ Mots de Lyndon





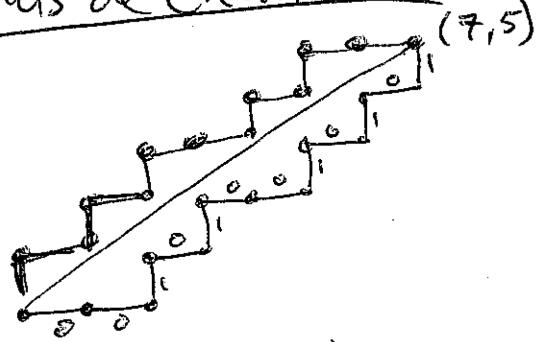
$w = 21010332$ $=?$ rep. canonique 01033221

$w' = 33221010$

$\boxed{\text{DEF}}$ Un mot w est un mot de Lyndon si $w <_{lex} s$ pour tous les suffixes propres s de w.

③ Mots de Christoffel

Bernoulli (1771), Christoffel (19e), Berstel (1990)



$w = 001010010101$
est un mot de Christoffel
code les segments de droites digitaux de pente p/q.

$$\frac{5}{7} = 0 + \frac{1}{\frac{7}{5}} = 0 + \frac{1}{1+\frac{2}{5}} = 0 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$$

$$= 0 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = [0; 1, 2, 1, 1]$$

ALGO INPUT: $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1]$
OUTPUT: m. de C. de pente p/q

```
u = 0
v = 0
for i = 0, 1, ..., n-1 :
    if i is even:
        u = u·v^ai
    else
        v = u^ai v
return uv
```

$\boxed{\text{Ex}}$ $u = 0, v = 1$
$u = uv^0 = 0$
$v = u^1 v = 01$
$u = uv^2 = 00101$
$v = u^1 v = 0010101$
return $uv = 00101.0010101$

④ Factorisation de Lyndon

Thm (Lyndon 1954) Tout mot w non vide admet une unique factorization ~~comme~~ en une suite décroissante lexicographiquement

$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}, \quad l_1 >_{lex} l_2 >_{lex} \cdots >_{lex} l_k$$

où $n_i \geq 1$ et l_i est un mot de Lyndon $\forall i, 1 \leq i \leq k$.

abcdabd
abcdabb

$\boxed{\text{EX}}$ in|for|m|atique

un|i|ver|si|t|é|de|bor|de|aux

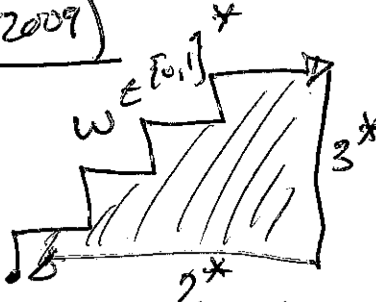
1|01|00101|001|0

Rmq ~~Fête~~ utilisé par (Zeilberger, Foata, 1998) pour fournir des preuves combinatoires ~~sur la~~ d'identités associées à la fonction zeta d'Ihara-Selberg d'un graphe

⑤ Convexité digitale

Thm (Brlek, Lachaud, Provençal, Reutenauer, 2009)

Soit un mot ~~w~~ $w \in \{0,1\}^*$ décrivant la partie Nord-Ouest d'un polyomino P. ~~Alors P est digitalement convexe~~ dont le mot de contour est $w3^*2^*$.



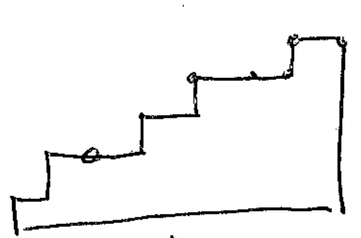
Alors P est digitalement convexe $\iff$ l'unique factorisation de Lyndon

$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$$

est t.q. tous les l_i sont des mots de ~~Lyndon~~ Christoffel.

$\boxed{\text{EX}}$ 1|01|00101|001|0 $\Rightarrow$

mots de Christoffel



digitalement convexe !

⑥ • Peut-on adapter ceci dans $\mathbb{Z}^3$?

• Sage Thursdays au LaBRI

• Ultimate Frisbee à Bègles Plage les lundis :)