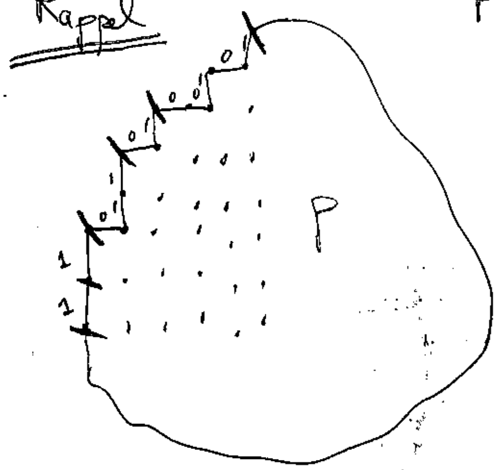
Une extension d-dimensionelle des mots de Christoffel

3/3/2017
LaBRI
S. Labbé

with C. Reut.
DCG (2015)

Rappel

$P \subseteq \mathbb{Z}^d$ digitalement convexe si $\mathrm{conv}_{\mathbb{R}^d}(P) \cap \mathbb{Z}^d \subseteq P$



Thm (BLPR, 2009) Un mot $w \in \{0,1\}^*$ est NW-convexe ssi son (unique) factorisation de Lyndon

$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}, \quad l_1 >_{lex} l_2 >_{lex} \cdots >_{lex} l_k$$

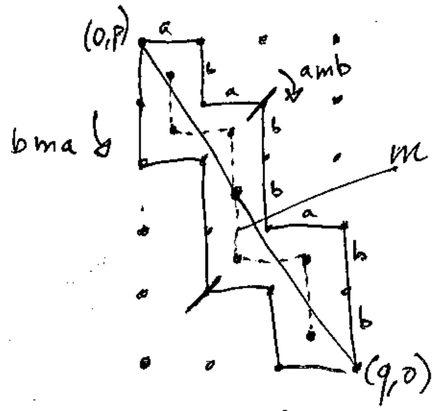
est telle que tous les l_i sont des mot de Christoffel.

$\boxed{\text{EX}}$ 1 | 1 | 011 | 01 | 00101

Un **Mot de Christoffel** de vecteur normal $\vec{a} = (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\gcd(p,q)=1$, code le segment digitel de $(0,p)$ à $(q,0)$.

Ex $\vec{a} = (p,q) = (5,3)$

$$W_{\vec{a}} = a.\underbrace{babbab}_{m}.b$$



DEF EQUIVALENTE

Codage du graphe de Cayley du groupe $\mathbb{Z}/(p+q)\mathbb{Z}$ avec générateur p.

$\boxed{\text{EX}}$ $0 \xrightarrow[a]{+5} 5 \xrightarrow[b]{} 2 \xrightarrow[a]{} 7 \xrightarrow[b]{} 4 \xrightarrow[b]{} 1 \xrightarrow[a]{} 6 \xrightarrow[b]{} 3 \xrightarrow[b]{} 0$

Voir Berstel (2007) pour 14 caractérisations des mots de Christoffel.

Thm (Pirillo, 2001) $amb \in \{a,b\}^*$ est un m. de C. $\Leftrightarrow$ amb et bma sont conjugués

$\boxed{\text{EX}}$ $(\Rightarrow)$ $bma = b\,bab\,b|ab\,a$, $\longrightarrow |\, amb$

$(\Leftarrow)$ Sp que amb ($|m|=6$) et bma sont conjugués de la façon suivante :

$a\; m_1\; m_2\; m_3\; m_4\; m_5\; m_6\; b$

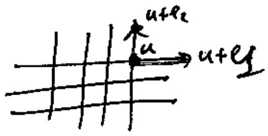
$m_5\; m_6\; a\; b\; m_1\; m_2\; m_3\; m_4$

Donc, $m_1 = m_6 = m_3 = b = m_4 = m_1$ $\Rightarrow$ $amb = ababbabb$.

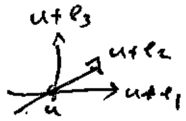
$a = m_5 = m_2 = a$

Réseau hypercubique

$d \geq 2, \quad \mathbb{E}_d = \{ (u, u+e_i) \mid u \in \mathbb{Z}^d, \ 1 \leq i \leq d \}$



$\mathbb{E}_2$



$\mathbb{E}_3$

Graphe de Christoffel

$d \geq 2$, Soit $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ t.q. $\mathrm{pgcd}(\vec{a}) = 1$

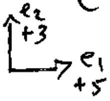
Soit $s = \|\vec{a}\|_1 = \sum a_i$

$$F_{\vec{a}} : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$$
$$\vec{x} \mapsto \vec{a} \cdot \vec{x} \bmod s = \sum a_i x_i \bmod s$$

Le graphe de Christoffel de vecteur normal $\vec{a}$ est

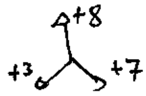
$$H_{\vec{a}} = \{ (u, u+e_i) \in \mathbb{E}_d \mid F_{\vec{a}}(u) < F_{\vec{a}}(u+e_i) \}$$

$\boxed{\text{EX}}$ $\vec{a} = (5,3)$

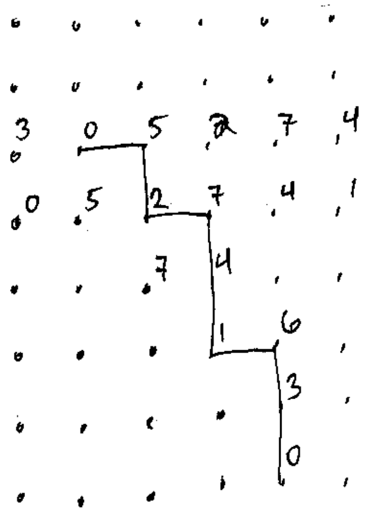


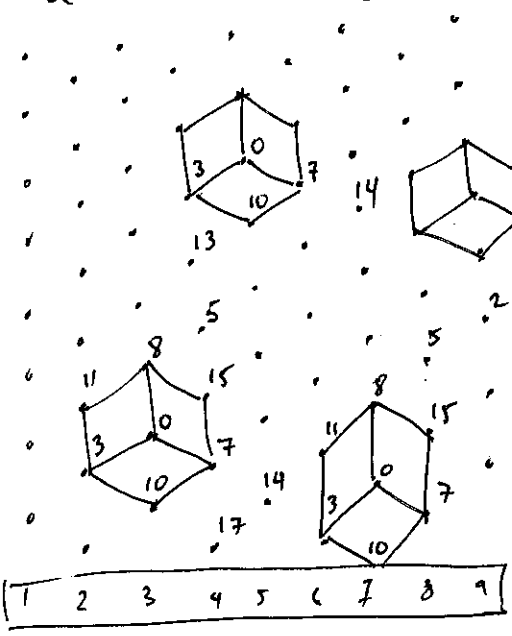
mod 8

$\vec{a} = (3,7,8)$



mod 18





Biologie

- Arêtes de $\mathbb{E}d$ incidentes à zéro mod $\ker F_{\vec{a}}$

$$Q = \{ (u,v) \in \mathbb{E}d \mid F_{\vec{a}}(u) = 0 \text{ ou } F_{\vec{a}}(v) = 0 \}$$

- Pattes de $X \subseteq \mathbb{E}d$ sont (dessinées en rouge)

$$X \cap Q$$

- Corps de $X \subseteq \mathbb{E}d$:

$$X \setminus Q$$

Opérations $X \subseteq \mathbb{E}_d$, $t \in \mathbb{Z}^d$

- **Miroir** ou **Inverse** : $-X = \{(-v,-u) \mid (u,v) \in X\} \subseteq \mathbb{E}_d$
- **Translation** : $X+t = \{(u+t, v+t) \mid (u,v) \in X\} \subseteq \mathbb{E}_d$
- $FLIP(X) = (X \setminus Q) \cup (Q \setminus X)$

$\boxed{EX}$ à faire sur dessins ci-haut

Proposition Soit $t \in \mathbb{Z}^d$ t.q. $F_{\vec{a}}(t) = 1$ (vecteur bezout).

$$H_{\vec{a}} + t = FLIP(H_{\vec{a}})$$

(Ceci généralise le fait que amb soit conjugué à bma)

$\boxed{EX}$ sur dessin

Lemme

	i.e.	généralise
$-(H_{\vec{a}} \setminus Q) = H_{\vec{a}} \setminus Q$	le corps de $H_{\vec{a}}$ est symmétrique	m est un palindrome
$-H_{\vec{a}} = FLIP(H_{\vec{a}})$	le flip de $H_{\vec{a}}$ est son miroir	$\widetilde{amb} = bma$
$-H_{\vec{a}} = H_{\vec{a}} + t$	$H_{\vec{a}}$ est une translation ~~conjugué~~ de son miroir	amb conjugué à son miroir $\widetilde{amb}$

La Réciproque

Théorème
- K s/gp d'indice fini de $\mathbb{Z}^d$ t.q. $\sum e_i \in K$
- $M \subseteq \mathbb{E}_d$ invariant par les translations de K
- $Q = \{(u,v) \in \mathbb{E}_d \mid u \in K \text{ ou } v \in K\}$
- jambes de M sont positives i.e. $M \cap Q = \{(0, e_i) \mid 1 \leq i \leq d\} + K$

$\exists\, t \in \mathbb{Z}^d$ t.q. $FLIP(M) = M + t$ $\iff$ $M = H_{\vec{a},w}$ où $w \in \mathbb{N}$ divise $s = \|\vec{a}\|_1$ et $0 < \frac{s}{w} < d$.

Nouvelles définitions Soit w, épaisseur, un diviseur de $s = \|\vec{a}\|_1$.

$$F_{\vec{a},w} : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}/w\mathbb{Z}$$
$$\vec{x} \longmapsto \vec{a}\cdot\vec{x} \bmod w$$

$$H_{\vec{a},w} = \{(u, u+e_i) \in \mathbb{E}_d \mid F_{\vec{a},w}(u) < F_{\vec{a},w}(u+e_i)\}$$

Note: Peut s'interpréter comme le complément si $d=3$ et $w = \frac{\|\vec{a}\|_1}{2}$)