A d-dimensional extension of Christoffel words

Bordeaux
10 fév 2017

Thèmes de recherche

géométrie digitale $\mathbb{Z}^d$ $\xleftrightarrow{\text{relations}}$ combinatoire des mots

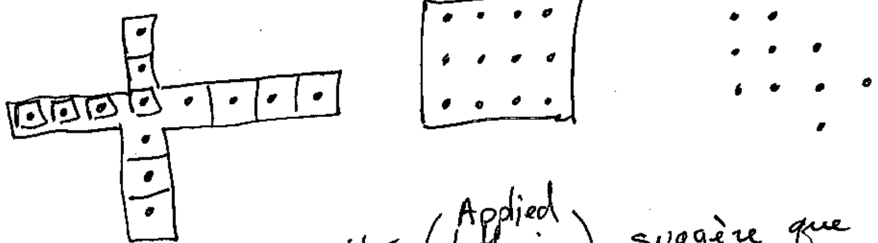
systèmes dynamique
e.g. fractions continues

1 Géométrie digitale

cherche à adapter la geo. euclidienne sur $\mathbb{Z}^d$
droites, plans, hyperplans, pavages, cercle, etc.

Question Quand est-ce que $P \subseteq \mathbb{Z}^2$ polyomino est-il convexe?

DEF $P \subseteq \mathbb{Z}^2$ est un polyomino s'il est 4-connexe.



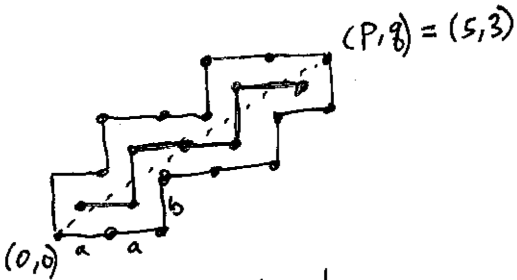
Une définition de convexité (Applied Lothaire) suggère que Périmètre = 2 hauteur + 2 largeur.
ou de façon équivalente que l'intersection avec lignes verticales ou horizontales est convexe.

DEF $P \subseteq \mathbb{Z}^2$ est convexe si

$$\operatorname{conv}(P) \cap \mathbb{Z}^2 \subseteq P$$

2. Mots de Christoffel

- Elwin B. Christoffel (1829–1900) mathématicien et physicien
- Jean Bernoulli (1771), fractions continues et première apparition des mots de Christoffel
- Jean Berstel (1990) : premier à les nommer "mots de Christoffel"



$w = a\underbrace{abaaba}_{m}b$

Soit (p,q) copremiers. Le mot de Christoffel de paramètre (p,q) est le mot $w \in \{a,b\}^*$ codant le chemin de pas unités $(1,0)$ et $(0,1)$ allant de l'origine au point (p,q) strictement sous le segment $(0,0)-(p,q)$ et le plus proche de ce segment.

À part le cas $(p,q)=(0,1)$, w est de la forme amb avec $m \in \{a,b\}^*$.

<u>Lemme</u> m est un palindrome

<u>Preuve</u> Une translation $\nwarrow^{(-1,+1)}$ laisse la partie m invariante.
Une rotation de $180°$ préserve la figure. □

<u>Def2</u> (codage de Cayley Graph)

Groupe $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ avec générateur 3.

$$0 \xrightarrow[a]{+3} 3 \xrightarrow[a]{} 6 \xrightarrow[b]{} 1 \xrightarrow[a]{} 4 \xrightarrow[a]{} 7 \xrightarrow[b]{} 2 \xrightarrow[a]{} 5 \xrightarrow[b]{} 0$$

a = pas montant, b = pas desc.

Voir Berstel (2007) pour 14 caractérisations des mots de C.

3. Mots de Lyndon

Introduit par Roger Lyndon (1917–1988) sous le nom de "standard lexicographic sequences" en 1954 et 1955.

Utilisés pour construire des bases de certains groupes abéliens libres.

→ Factorisations de monoïdes libres (Schützenberger, Viennot, etc.)

<u>Def</u> Un <u>mot de Lyndon</u> est un mot qui est plus petit lexicographiquement que ses permutations circulaires. [voir G. Melançon, Encyclopédie des math]

<u>ex</u> atoire = $\min_{lex}$ {atoire, toirea, oireat, ireato, reatoi, eatoir}

<u>Thm</u> (Lyndon, 1954) Tout mot w non vide admet une unique factorisation comme une suite de mots de Lyndon décroissante lexicographiquement:

$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}, \quad l_1 >_{lex} l_2 >_{lex} \cdots >_{lex} l_k$$

où $n_i \geq 1$ et l_i est un mot de Lyndon $\forall i$ $1 \leq i \leq k$.

<u>ex</u> (com) (bin) (atoire)

2 | 1 | 0 1 2 | 0 1 | 0 1

- Les mots de Lyndon sur l'alphabet $\{0,1\}$ sont

$$0,\ 1,\ 01,\ 001,\ 011,\ 0001,\ 0011,\ 0111,\ 00001,\ \dots$$

- Prop (Fredericksen, Maiorana, 1978) La concaténation en ordre croissant de mots de Lyndon sur alphabet A de longueur divisant n, $\forall n \geq 1$, est une suite de Bruijn, i.e. un mot dont tous les éléments de A^n apparaissent une et une seule fois

  ex $A = \{0,1\}$ $\quad 0\ 0001\ 0011\ 01\ 0111\ 1$

  Elle se calcule en temps linéaire et mémoire logarithmique. (Berstel, Perrin, 2007)

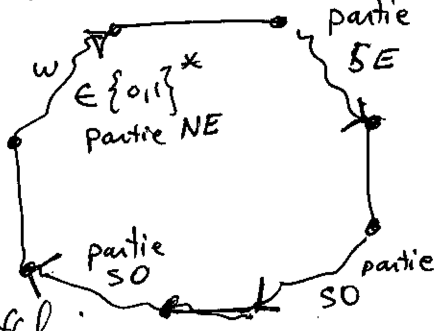
Autres remarques

- Duval (1983), calcul de la factorisation $O(n)$, mémoire constante
- Duval (1988), énumération des mots de Lyndon en temps $O(n)$
- Les mots de Christoffel sont des mots de Lyndon
- Mots de Nyldon (Question de Darij Grinberg sur mathoverflow)
- Compter les mots de Lyndon de longueur $n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \left[\#A\right]^{n/d}$, A001037

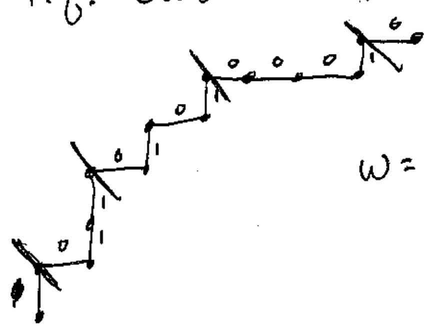
4. Convexité

Théorème (Brlek, Lachaud, Provençal, Reutenauer, 2009)

Un mot $w \in \{0,1\}^*$ décrivant la partie NE d'un polyomino est convexe ssi son unique factorisation de Lyndon
$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$$
est t.q. tous les l_i sont des mots de Christoffel.



EX



$$w = (1).(011).(01)^2.(0001).(0)$$

Question Existe-t-il une généralisation de ce théorème dans $\mathbb{Z}^3$?

À préparer pour la prochaine fois :
- PQ énumération des mots de Lyndon en $O(n)$
- Comment calculer la facto de Lyndon
- PQ m. de C $\Rightarrow$ m. de Lyndon ?