Approximation diophantienne simultanée et fractions continues multidimensionnelles

Comprehensible Seminar

Sébastien Labbé

September 22, 2016

1:30 p.m. – 0/36

Nous démontrerons le premier résultat de base de l'approximation diophantienne, c'est-à-dire le théorème de Dirichlet qui garantit l'existence de bonnes approximations des nombres irrationnels par les nombres rationnels. Nous énoncerons une généralisation en dimension supérieure de ce théorème.

Puis, nous présenterons une version matricielle des fractions continues usuelles permettant une généralisation naturelle en dimension supérieure. Nous discuterons de la qualité des approximations engendrées par les fractions continues multidimensionnelles par comparaison au théorème de Dirichlet.

Séminaire compréhensible

Approx. diophantienne et algo. f.c. multidimensionnelles

Liège 22/09/16 S. Labbé ①

① Approx. diophantienne

Def $p/q \in \mathbb{Q}$, $q>0$, est une meilleure approximation d'un nombre réel α si $\forall$ autre fraction p'/q' avec $0<q'<q$ on a

$$\left|\alpha - \frac{p'}{q'}\right| > \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

$\boxed{EX}$

$$0{,}00159 \approx \left|\pi - \frac{314}{100}\right| > \left|\pi - \frac{22}{7}\right| \approx 0{,}00126$$

Donc, $3{,}14 = \frac{157}{50}$ n'est pas une meilleure approximation de π.

Avec le dév. décimal, on a toujours

$$\forall \alpha \forall N \exists p \text{ t.q. } \left|\alpha - \frac{p}{10^N}\right| < \frac{1}{10^N}$$

ou encore

$$\forall \alpha \forall q \exists p \text{ t.q. } \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$$

Question Peut-on faire mieux ?

Théorème (Dirichlet, 1842) Soit $\alpha, Q \in \mathbb{R}$ t.q. $Q>1$. Alors il existe des entiers p, q t.q. $1 \le q < Q$ et

$$|\alpha q - p| \le \frac{1}{Q}$$

Remarque : Ceci implique $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{qQ} < \frac{1}{q^2}$.

Preuve Sp Q entier (si $Q \in \mathbb{R}$, cela en découle...)

On considère les $Q+1$ nombres suivants

$$0,\ 1,\ \{\alpha\},\ \{2\alpha\},\ \dots,\ \{(Q-1)\alpha\} \in [0,1]$$

On subdivise $[0,1]$ en Q sous-intervalles

$$\frac{u}{Q} \le x < \frac{u+1}{Q} \qquad (u = 0, 1, \dots, Q-2)$$

$$\frac{Q-1}{Q} \le x \le \frac{Q}{Q} = 1 \qquad (u = Q-1)$$

Au moins l'un des sous-intervalles contient deux (ou plus) des $Q+1$ nombres ci-haut. Donc $\exists$ entiers r_1, r_2, s_1, s_2 $r_1 \neq r_2$ t.q.

$$\left|(r_1\alpha - s_1) - (r_2\alpha - s_2)\right| \leq \frac{1}{Q}$$

Sp $r_1 > r_2$, $q = (r_1 - r_2)$, $p = (s_1 - s_2)$.

Alors $1 \leq q < Q$ et $|\alpha q - p| \leq \frac{1}{Q}$ $\square$

<u>Corollaire</u> Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\exists\ \infty$ paires (p,q) d'entiers copremiers t.q. $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

<u>Preuve</u>

$$\frac{1}{Q_0} \geq |\alpha q_0 - p_0| > \frac{1}{Q_1} \geq |\alpha q_1 - p_1| > \frac{1}{Q_2} \geq |\alpha q_2 - p_2| \ldots$$

<u>Remarque</u> le corollaire est FAUX si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

$\alpha = \frac{u}{v}$. Si $\alpha \neq \frac{p}{q}$, alors $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{u}{v} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{qu - pv}{vq}\right| \geq \frac{1}{vq} > \frac{1}{q^2}$.
et si $q > v$

<u>Thm (Dirichlet 1842, Approx. simultanée)</u> Sp $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$, $Q > 1$, est un entier. Alors $\exists\ q, p_1, \ldots, p_d$ t.q.

$$1 \leq q < Q^d \quad \text{et} \quad |\alpha_i q - p_i| \leq \frac{1}{Q} \quad (1 \leq i \leq d)$$

<u>Corollaire</u> Si au moins l'un des $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ est irrationnel. Alors $\exists\ \infty$ n-uplets $\left(\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_d}{q}\right)$ t.q.

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+1/d}}$$

<u>Question</u> Comment trouver ces approximations?
(question ouverte lorsque $d \geq 2$)

② Algorithmes de fraction continues multidimensionnelles

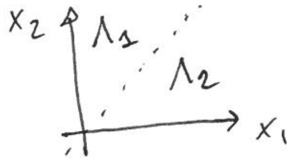
Un <u>A.F.C.M</u> est une fonction

$$T : \Lambda \longrightarrow \Lambda$$
$$\vec{x} \longmapsto [M(\vec{x})]^{-1} \vec{x}$$

où $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est un cône et M est t.q.

- $\forall x \in \Lambda$, $M(x)$ est une matrice $d{\times}d$ inversible $(\in SL(d, \mathbb{Z}))$
- $\forall x \in \Lambda$, $\forall \alpha > 0$, $M(\alpha x) = M(x)$
- M est constante par morceaux
- coefficients de $M(x) \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{EX}}$ $d=2$, $\Lambda = \mathbb{R}^d_+$, Partition de $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$



$$\Lambda_1 = \{ (x_1, x_2) \in \Lambda \mid x_1 < x_2 \}$$
$$\Lambda_2 = \{ (x_1, x_2) \in \Lambda \mid x_1 > x_2 \}$$

$$M(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } x \in \Lambda_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } x \in \Lambda_2 \end{cases}$$

<u>Farey map</u>

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left[M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 < x_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > x_2 \end{cases}$$

F est <u>complet</u> car $F(\Lambda_1) = F(\Lambda_2) = \Lambda$.

<u>Def</u> Un AFCM T définit un <u>cocycle</u> $M_n : \Lambda \to SL(d, \mathbb{Z})$

$$M_0(x) = I \quad \text{et} \quad M_n(x) = M(x) M(Tx) M(T^2 x) \cdots M(T^{n-1} x)$$

$\boxed{\text{EX}}$ Soit $x = \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix}$

n	0	1	2	3	4	5	…	9	10
$F^n x$	$\begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pi-1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pi-2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pi-3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pi-3 \\ 1-(\pi-3) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pi-3 \\ 1-2(\pi-3) \end{pmatrix}$	…		$\begin{pmatrix} \pi-3 \\ 1-7(\pi-3) \end{pmatrix}$
$M(F^n(x))$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	…	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule

$$M_{10}\begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de $M_n(x)$ sont appelées <u>semi-convergents</u>.
ou <u>convergents</u> pour l'algorithme multiplicatif $\left(\text{ex} : \begin{pmatrix} 22 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$.

Quand $d=2$, les convergents $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ satisfont $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$.

Algorithmes de Brun, 1958

$\boxed{\text{EX}}$ $d=3$, $\Lambda = \mathbb{R}_+^3$, $\Lambda = \bigcup_{\pi \in S_3} \Lambda_\pi$ avec

$$\Lambda_\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda \mid x_{\pi 1} < x_{\pi 2} < x_{\pi 3}\}$$

$$M(x) = M_\pi \iff x \in \Lambda_\pi$$

où $M_{123} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}$, $M_{132} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, $M_{213} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 1&0&1 \end{pmatrix}$, etc.

Fait Aucun AFCM, lorsque $d \geq 3$, ne donnent des convergents $\left(\frac{p_1^{(n)}}{q^{(n)}}, \ldots \frac{p_d^{(n)}}{q^{(n)}}\right)$ qui satisfait $\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+1/d}}$ toujours.

Def Un AFCM est faiblement convergent au point $x \in \Lambda$, $\|x\| = 1$, si $\forall i$, $1 \leq i \leq d$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M_n(x) e_i}{\|M_n(x) e_i\|} = x$$

Def Un AFCM est fortement convergent au point $x \in \Lambda$, $\|x\| = 1$, si $\forall i$, $1 \leq i \leq d$, on a

$$\lim_{n \to \infty} M_n(x) e_i - \|M_n(x) e_i\| x = 0$$

- J'aurais voulu parler des résultats de Lagarias au sujet de l'exposant uniforme d'approximation
$$R((\vec{p}, q), \vec{\alpha}) = \log_{1/q} \left\|\vec{\alpha} - \frac{\vec{p}}{q}\right\|$$
et du lien avec les exposants de Lyapunov (sous certaines hypothèses) $$R_A^*(\vec{\alpha}) = 1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \quad \text{p.p. } \alpha.$$

- Lien avec formes simplectiques. via l'extension naturelle des AFCM
$$\tilde{F}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(x)^{-1} & 0 \\ 0 & M(x)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{a} \end{pmatrix}$$
qui permet, parfois, de calculer la mesure invariante d'un AFCM.

Références utilisées

- Diophantine Approximation, Schmidt, 1980
- Multidimensional Continued Fractions, Schweiger, 2000