Propriété Pisot pour l'algo MCF Arnoux Rauzy Poincaré

S. Labbé
14 oct 2015
Paris

Def Un nombre de Pisot est un nb algébrique Θ, $\Theta > 1$, dont tous les conjugués sont de module < 1.

Def Une matrice $A \in \mathbb{N}^{d\times d}$ est pisot (ou de spectre Pisot) si sa valeur propre dominante est simple et toutes les autres val. pr. sont de module < 1.

Thm (Perron, 1907) Si $A \in \mathbb{N}^{d\times d}$ est primitive, alors le rayon spectral $\rho = \rho(A)$ est une val. propre simple strictement dominante de A.
De plus, $\exists u > 0, v > 0$ t.q. $Av = \rho v$ et $uA = \rho u$.

Lemme $Av = \lambda v$ et $Aw = \mu w$. Si $\mu \neq \lambda$, alors $w \perp u$.
$uA = \lambda u$

Preuve $(\lambda - \mu) uw = \lambda uw - \mu uw = uAw - uAw = 0$. $\square$

Si A est primitive, on a une décomposition de l'espace en la somme directe $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}v \oplus u^\perp$, où $u^\perp = \{z \mid \langle z, u\rangle = 0\}$
(et aussi $= \mathbb{R}u \oplus v^\perp$)
sur laquelle A agit de façon diagonale.

~~Thm (Gelfand's Formula, 1941)~~ **Lemma** $\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$

(Avila, Delecroix 1506:03692)

Def semi-norme $\|A\|_u = \sup\limits_{\substack{z \in u^\perp \\ z \neq 0}} \frac{\|Az\|}{\|z\|}$

Si $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est un cône,
$$\|A\|_\Lambda = \sup_{u \in \Lambda} \|A\|_u .$$

Lemme (Avila, Delecroix) $A \in \mathbb{N}^{d\times d}$ primitive, $Av = \lambda v$, $uA = \lambda u$, $u > 0$, $v > 0$,
Si $\|A\|_u < 1$ ou $\|A^T\|_v < 1$, alors A est Pisot.

Preuve λ_2 = module of second largest eigenvalue $\Rightarrow$ $\lambda_2 \leq \|A\|_u$ et $\lambda_2 \leq \|A^T\|_v$.

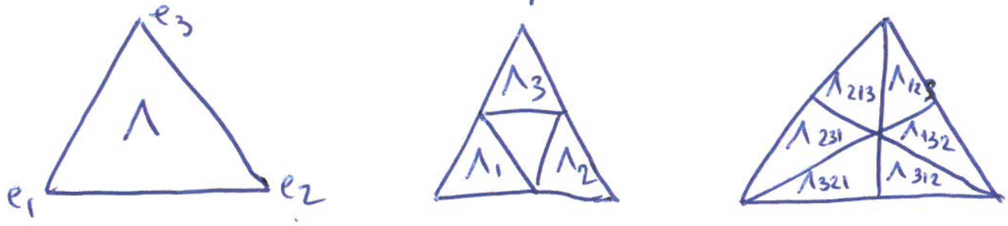
On veut ~~ff~~ utiliser ceci pour des semi-groupes de matrices...

L'algorithme d'Arnoux-Rauzy-Poincaré

cône $\Lambda = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0 \}$

sous-cônes $\Lambda_i = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \Lambda \mid 2x_i > x_1 + x_2 + x_3 \}$, $i = 1,2,3$

$\Lambda_\pi = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \Lambda \mid x_{\pi(1)} < x_{\pi(2)} < x_{\pi(3)} \}$, π permutation de $1,2,3$



$A_1 = \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 1&1&1 \end{pmatrix}$

$P_{123} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&0 \\ 1&1&1 \end{pmatrix}$, $P_{132} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&1 \\ 1&0&1 \end{pmatrix}$, $P_{231} = \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&0 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}$

$P_{213} = \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&0 \\ 1&1&1 \end{pmatrix}$, $P_{312} = \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, $P_{321} = \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$

L'algorithme : $M : \Lambda \to GL_3(\mathbb{Z})$

$$x \mapsto \begin{cases} A_i & \text{si } x \in \Lambda_i \ , i \in \{1,2,3\} \\ P_\pi & \text{sinon et si } x \in \Lambda_\pi \ , \pi \in S_3 \end{cases}$$

$\hookrightarrow x \in \Lambda_\pi \setminus \Lambda_{\pi(3)}$

et

$$T : \Lambda \to \Lambda$$
$$x \mapsto [M(x)]^{-1} x$$

Motivation

Exposant d'approximation $1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est $1.3888 > 1.3870$ (Cassaigne) > 1.368 (Brun)

On veut mieux connaître cet algo.

$\boxed{\text{EX}}$

$A_2 P_{213} A_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1&3&2 \\ 2&7&5 \\ 1&3&3 \end{pmatrix}$ val. propres $0{,}159$, $0{,}61$, $10{,}22$ Pisot!

$A_3 P_{213} A_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1&3&2 \\ 0&1&0 \\ 2&7&5 \end{pmatrix}$ $0{,}171$, 1, $5{,}828$ pas Pisot.

Note : vecteur propre dominant est respectivement dans Λ_2 et Λ_3

i.e. le cône engendré par les colonnes de la 1ère matrice.

Lemme (Avila, Delecroix) Soit $\{A_i\}_{i\in\Sigma}$ famille finie ou dénombrable de matrices de $SL(d,\mathbb{Z})$

et soit $D \subset \mathbb{R}^d$ cône adapté i.e.

① $D \neq \emptyset$, ② $D = \overline{D^\circ}$ et ③ $\forall i \in \Sigma \ A_i D \subset D$

Si $\forall i \in \Sigma$, on a

$$\|A_i^T\|_{A_i D} \leq 1$$

alors

$$\|(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_n})^T\|_{A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_n} D} \leq 1 \qquad (*)$$

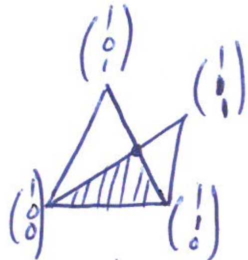
et $A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_n}$ a au plus une v.p. de module ≥ 1.

Si l'inégalité $(*)$ est stricte ~~alors~~ et que $A_{i_1} \cdots A_{i_n}$ primitive, alors $A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_n}$ est Pisot. $\square$

~~Lemme~~ Thm (Arnoux, Berthé, L) Avec les notations d'Arnoux-Rauzy Poincaré, on a

$$\|A_{\pi(3)}^T\|_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_{\pi(3)}} \leq 1 \quad \text{et} \quad \|P_\pi^T\|_{\Lambda_\pi \setminus \Lambda_{\pi(3)}} \leq 1$$

$\forall$ permutation $\pi \in S_3$. De plus, si $M(x) M(Tx) \cdots M(T^n x)$ est primitive alors elle est pisot.



Preuve sp que $\pi = 321$.

$A_{\pi(3)} = A_1 = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ sur le domaine $\Lambda_{321} \cap \Lambda_1$

Soit $v \in \Lambda_{321} \cap \Lambda_1$. $\exists\, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ t.q.

$$kv = \mu_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\mu_1+\mu_2+\mu_3\\ \mu_2+\mu_3\\ \mu_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ \mu_1\\ -\mu_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ -\mu_2-\mu_3\\ \mu_1+\mu_2\end{pmatrix}$$

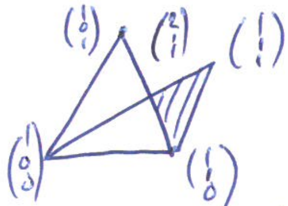
Or $z \in v^\perp \Leftrightarrow \langle kv, z\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, z\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\ \mu_1\\ -\mu_3\end{pmatrix}, z\right\rangle$

$\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, z\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\ -\mu_2-\mu_3\\ \mu_1+\mu_2\end{pmatrix}, z\right\rangle$

Donc, $(A_1)^T z = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} z = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\mu_1&-\mu_3\\0&-\mu_2-\mu_3&\mu_1+\mu_2\end{pmatrix} z =: Bz$

et $\|A_1^T\|_v = \sup_{\substack{z\in v^\perp\\ z\neq 0}} \frac{\|A_1^T z\|}{\|z\|} = \sup_{\substack{z\in v^\perp\\ z\neq 0}} \frac{\|Bz\|}{\|z\|} \leq \sup_{z\neq 0} \frac{\|Bz\|}{\|z\|} = \|B\|_1 = 1$

$$P_{321} = \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$$ sur le domaine $\Lambda_{321} \setminus \Lambda_1$



$v \in \Lambda_{321} \setminus \Lambda_1$, $\exists\, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \geq 0$ t.q. $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ t.q.

$$kv = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\mu_2 \\ -\frac{1}{2}\mu_2 - \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\mu_2 \\ \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 \end{pmatrix}$$

$$z \in v^\perp \Leftrightarrow \langle kv, z \rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\mu_2 \\ -\frac{1}{2}\mu_2 - \mu_3 \end{pmatrix}, z \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\mu_2 \\ \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 \end{pmatrix}, z \right\rangle$$

Donc

$$P_{321}^T z = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&0 \\ 1&1&1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\mu_2 & -\frac{1}{2}\mu_2 - \mu_3 \\ 0 & \frac{1}{2}\mu_2 & \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 \end{pmatrix} z =: Cz$$

Pareillement

$$\|P_{321}^T\|_v = \sup_{\substack{z \in v^\perp \\ z \neq 0}} \frac{\|P_{321}^T z\|}{\|z\|} = \sup_{\substack{z \in v^\perp \\ z \neq 0}} \frac{\|Cz\|}{\|z\|} \leq \|C\| \leq 1$$ avec norme 1

Pas encore rédigé les détails pour l'inégalité stricte $(*)$. $\square$

Pas (encore) adapté la preuve pour $d=4$.

<u>Lemme (Avila, Delecroix)</u> Soit $\{A^{(i)}\}_{i \in \Sigma}$ famille de matrices de $SL(d, \mathbb{Z})$

Soit $(\underset{\Sigma^{\mathbb{N}}}{\Delta}, \underset{\text{shift}}{T}, \underset{\text{cocycle}}{A})$, i.e. $A_n : \Sigma^n \to GL(d, \mathbb{Z})$, $i_1 \dots i_n \mapsto A^{(i_1)} A^{(i_2)} \cdots A^{(i_n)}$.

et D domaine adapté. Sp $\forall i \in \Sigma$, on a

$$\|(A^{(i)})^T\|_{A^{(i)} D} \leq 1.$$

Soit μ une mesure T-invariante ergodique sur D t.q.

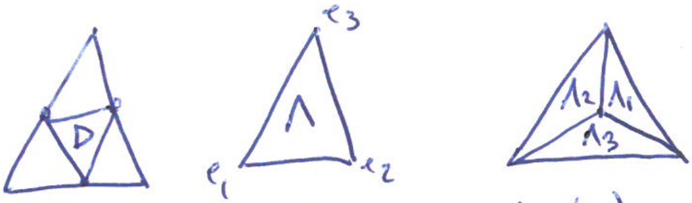
- le cocycle A_n est log-intégrable
- $\exists$ cylindre $[w]$ t.q. $\mu([w]) > 0$, $A_n(w)$ est positif et $\|(A_n^{(w)})^T\|_{A_n^{(w)} D} < 1$

Alors les deux premiers exposants de Lyapunov du cocycle A_n pour la mesure μ satisfont $\gamma_1^\mu > 0 > \gamma_2^\mu$.

Algorithme Meester (fully substractive)

cone $\Lambda = \mathbb{R}^3_+$

$$\Lambda_i = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \Lambda \mid \min\{x_1, x_2, x_3\} = x_i \}$$



d domaine adapté

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&1&0 \\ 1&0&1 \end{pmatrix},\ F_2 = \begin{pmatrix} 1&1&0\\ 0&1&0 \\ 0&1&1 \end{pmatrix},\ F_3 = \begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$M : \Lambda \to GL_3(\mathbb{Z}) \qquad\qquad Tx = M(x)^{-1} x$$
$$x \mapsto F_i \text{ si } x \in \Lambda_i,$$

~~Lemme~~ Thm (Avila, Delecroix) (d quelconque)

- $\|(F_i)^T\|_D \leq 1$
- $F_{i_1} \cdots F_{i_n}$ primitif $\Leftrightarrow$ $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, d\}$
- —— $\|$ —— $\Rightarrow$ $F_{i_1} \cdots F_{i_n}$ pisot.

Preuve ($d=3$) Soit $v \in D$, $\exists\, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$ $\mu_1+\mu_2+\mu_3 = 1$ t.q.

$$kv = \mu_1 \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1\\0\\1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3 \end{pmatrix}$$

Or $z \in v^\perp \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}, z \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3 \end{pmatrix}, z \right\rangle$

Donc, $F_1^T z = \begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} \mu_1&\mu_2&\mu_3\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} z =: Bz$ (with ∞-norm)

et $\|F_1^T\|_v = \sup_{\substack{z \in v^\perp \\ z \neq 0}} \dfrac{\|F_1^T z\|}{\|z\|} = \sup_{\substack{z \in v^\perp \\ z \neq 0}} \dfrac{\|Bz\|}{\|z\|} \leq \|B\| \leq 1$.

Note B est stochastique $\Rightarrow [\dots] \Rightarrow$ Pisot $\square$

Algorithme Brun

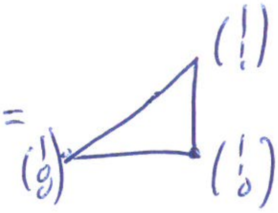
B_i : matrices Brun.

Lemme (Avila, Delecroix) $B_{i_1} \cdots B_{i_n}$ primitive $\Rightarrow$ $B_{i_1} \cdots B_{i_n}$ Pisot.

Preuve

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D =$



$$V = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu_1 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$$

$$Z \in V^{\perp} \iff \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Z \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_1 \\ -\mu_3 \end{pmatrix}, Z \right\rangle$$

$$(B^{(1)})^T Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & -\mu_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z$$

$$\| B^{(1)T} \|_V \leq 1$$