

Chap 6. Sturmian sequences Pytheas Fogg

6.1 Basic Def Une suite u est sturmienne si sa complexité est $p_u(n) = n + 1$.

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \text{suites} \\ \text{sturmiennes} \end{array} \right\} \quad \left[\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \text{suite} \\ \text{sturmienne} \\ \text{bifinie} \end{array} \right\} \text{ exemples bas} \right]$$

[Ex] Les facteurs sont $0, 1; 01, 10, 11; 011, 101, 110, 111; \dots$

Def Lemme Si $u \in \Sigma$, alors soit 11 ou 00 est facteur mais pas le 2.

Def $u \in \Sigma$ is of type 0 si les 1 sont isolés, denoted Σ_0
of type 1 si les 0 sont isolés, -11- Σ_1

Système dynamique $u = u_0 u_1 u_2 u_3 \dots$
shift $S \left(\begin{array}{l} u \\ v = u_1 u_2 u_3 \dots \end{array} \right)$ dyn. system (X_u, S)

6.2 Bifinies

$X_u = \text{closure of } \{S^n u \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Prop 6.25 Une suite bifinie u est sturmienne $(\Rightarrow)$ c'est une suite de complexité $n+1$ qui n'est pas éventuellement périodique.
(pour éviter $0^\infty 1 0^\infty$)

$$\Sigma = \dots \quad X_u = \text{closure of } \{S^n u \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \begin{array}{l} S \left(\begin{array}{l} u = \dots u_{-2} u_{-1} u_0 u_1 u_2 \dots \\ v = \dots u_{-1} u_0 u_1 u_2 \dots \end{array} \right) \end{array}$$

6.3 Coding sequences

$$\sigma_0 \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 10 \end{cases} \quad \sigma_1 \begin{cases} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} u = \dots u_{-2} u_{-1} u_0 u_1 u_2 \dots \\ \sigma \left(\begin{array}{l} u \\ v = \dots v_{-2} v_{-1} v_0 v_1 v_2 \dots \end{array} \right) \\ = \dots \sigma(u_{-2}) \sigma(u_{-1}) \sigma(u_0) \sigma(u_1) \sigma(u_2) \dots \end{array}$$

Lemme 6.3.3 Si u est sturmienne de type $p \in \{0, 1\}$,
alors $\exists! v$ t.g. $u = \sigma_p(v)$ ou $u = S \sigma_p(v)$.

EX $u = \dots 111 \overset{\sigma_1}{\circ} 11 0111 \dots$ de type 1

$v = \dots 01011$

$u = S \sigma_1(v)$

Lemma 6.3.5 $v \in \Sigma_{(\text{ Sturmian })} \Leftrightarrow \sigma_0(v) \in \Sigma_{(\text{ Sturmian })}$

Def 6.3.6 $\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ où v est l'unique

$u \mapsto v$

suite t.g. $u = \sigma_i(v)$ ou $u = S \sigma_i(v)$ with $i=0$ ou 1 .

Def 6.3.7 $\Psi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ où n_u est le plus petit entier

$u \mapsto \Phi^{n_u}(u)$

positif t.g. $\Phi^n(u)$ n'est pas du m type que u .

EX $u = \dots 1111 \boxed{01111} \boxed{01111} \boxed{01111} \boxed{01111} \dots$

$\Psi \nmid$

$w = \dots \circ \circ \circ \circ \circ \dots$

$v = \dots \circ \circ \circ \circ \circ \dots$

σ_1^5

On peut tjs écrire $u = S^k \sigma_1^a(v)$ avec $0 \leq k \leq a$

ou $u = S^{-b} \sigma_1^a(v)$ avec $0 \leq b \leq a$

"une sorte" (SOFIC)

"2e sorte" (SFT)

Thm 6.3.33 $\forall$ suite $u \in \Sigma$ Sturmienne, on peut définir une suite

(a_n, b_n) avec $b_n \leq a_n$ et une famille de suite Sturmienne $w^{(n)}$

t.g. $w^{(n)} = \begin{cases} S^{-b_n} \sigma_0^{a_n}(w^{(n+1)}) & \text{si } n \text{ pair} \\ S^{-b_n} \sigma_1^{a_n}(w^{(n+1)}) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

et où $w^{(0)} = u$. La suite (a_n, b_n) est uniquement déterminée.

L'ensemble des suites admissibles est caractérisé complètement par

- $a_n > 0$ si $n \geq 1$, $a_0 \geq 0$
- $0 \leq b_n \leq a_n$
- si $b_{n+1} = a_{n+1}$, alors $b_n = 0$ (?)

Def 6.3.34 La suite (a_n, b_n) est appelée "second multiplicative coding" of α .

EX: Calculer (a_n, b_n) de l'exemple distribué.

6.4 Propriétés arithmétiques, FC, SNumeration

Def 6.4.10 Tout nombre irrationnel $\alpha \in [0, 1]$ admet une unique suite $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n > 0$, $\forall n$ $\alpha = 0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$ $= [0; a_1, a_2, \dots]$

a_n : quotients partiels

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

satisfait:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

Prop 6.4.13 Soit $T:]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ et $F:]0, 1[\rightarrow \mathbb{N}$
 $x \mapsto \left\{ \frac{1}{x} \right\}$ et $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

Alors, $\forall \alpha$ irrat. $\in]0, 1[$, les quotients partiels de α sont $a_n = F(T^{n-1}(\alpha))$

Si $\beta_n = (-1)^n T(\alpha) T^2(\alpha) \dots T^n(\alpha)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad q_n \alpha - p_n = \beta_n$$

Ostrowski num. syst.

~~Soit $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n \geq 0$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ $n \geq 2$~~

~~Soit $\theta = [0; a_1, a_2, \dots]$ avec $\frac{p_n}{q_n}$ les convergents q_n~~

Prop 6.4.14 Tout entier $k \geq 0$ s'écrit $k = \sum_{n=1}^N b_n q_{n-1}$
 (entiers) ou b_n entiers $\forall n$. $0 \leq b_n \leq a_n$ et $a_n = b_n \Rightarrow b_{n-1} = 0$.

Thm 6.4.16 (O.n.s. real numbers) ~~Thm~~ Soit $\Theta = [0; a_1, a_2, \dots] \in [0, 1]$ irrationnel
 Tout nombre réel $x \in [-1, \Theta]$ s'écrit $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta_n$ où les
 coef. b_n sont entiers t.g. $0 \leq b_n \leq a_n$ et $b_n = a_n \Rightarrow b_{n+1} = 0$.

Rem: $\beta_n = a_n \beta_{n-1} + \beta_{n-2}$

Rem ∞ many Ostrowski system

~~Thm 6.4.18 (dual O.n.s. real numbers) $\forall x \in [0, 1 + \Theta]$ s'écrit
 $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta_n$ où $b_n \in \mathbb{Z}$ $0 \leq b_n \leq a_n$, $a_n = b_n \Rightarrow b_{n+1} = 0$~~

Thm 6.4.21+22 Soit (a_n, b_n) la "second multiplicative coding" d'une
 suite sturmienne u . Alors u est le codeage ~~thm~~
~~rotation d'angle θ~~ de l'orbite d'un point x par
 rotation d'angle θ sur $[-1, \Theta]$ où

$$\Theta = [0; a_1, a_2, \dots]$$

et $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta_n$ i.e. (b_n) est le développement
 d'Ostrowski de x selon la suite (a_n) .

Exercice 6.6.9: Obtenir le "first multiplicative coding" à
 partir de l'extension naturelle de la fct de Gauss.

