

Suites d'Arnoux Rauzy Poincaré (avec Valérie Berthé)

S. Labbe
26e fev 2015

arxiv:1404:4189
Adv. Applied Math.
63 (2015) 90-130.

Mot de Tribonacci

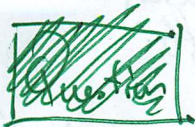
$$\sigma: \begin{cases} 1 \rightarrow 12 \\ 2 \rightarrow 13 \\ 3 \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$\sigma(w) = w = 1.2.13.121.121312, \dots$$

un mot infini dans la direction $\begin{pmatrix} \beta^2 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$

où β est valeur propre dominante de

$$\text{la matrice d'incidence de } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = 1,8392 \dots$$



La complexité en facteurs de w est $p(n) = 2n+1$. (suite Arnoux Rauzy)
Le chemin dans $\mathbb{Z}^3$ où les lettres $\{1, 2, 3\}$ sont remplacés par les pas unitaires e_1, e_2, e_3 reste à distance bornée de la droite $\begin{pmatrix} \beta^2 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$.

Question Peut-on engendrer des mots de $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ pour toute direction $v \in \mathbb{R}_+^3$ si possible avec $p(n)$ linéaire et à dist. bornée.

Thm (Berthé, L. 2015) $(\forall v \in \mathbb{R}_+^3) (\exists w \in \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}) \text{ t.g.}$

- les fréquences des lettres dans w existent et sont égales à v .
- $w = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n(1)$ où la suite $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est donnée par l'exécution de l'algo Arnoux Rauzy Poincaré sur le mot v .
(9 substitutions possibles)

$$\begin{aligned} 2n+1 &\leq p(n) \leq \frac{\varepsilon}{2}n+1 & \text{si } \dim_{\mathbb{Q}}(v) &= 3 \\ p_w(n) &= n+K & \text{si } \dim_{\mathbb{Q}}(v) &= 2 \\ p_w(n) &\text{ est bornée} & \text{si } \dim_{\mathbb{Q}}(v) &= 1 \end{aligned}$$

Conjecture Presque sûrement distance $(\mathbb{R}^3, \text{chemin de } w \text{ dans } \mathbb{Z}^3)$ est bornée.

Cette conjecture a été prouvée pour un autre algo : Brun par {Delecroix, Hejda, Steiner, Avila}

- Plan
- Algo frac. cart. multidim.
 - Ex. Brun, ARP, FC d=2
 - Mots Sturmien
 - Mots ARP 3d

Algo de FC multidim

Λ sous-cône du cône positif $\mathbb{R}_+^d$

(souvent $\Lambda = \mathbb{R}_+^d$, $\Lambda = \{0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_d\}$)

Un algo de fractions continues multidimensionnelles (AFCM) est une fct.

$$F: \Lambda \rightarrow \Lambda$$

$$x \mapsto M(x)^{-1}x$$

où $M: \Lambda \rightarrow GL(7L, d)$ est une fonction

- homogène de degré 0
- constante par morceaux
- qui associe à chaque x une mat. inversible $M(x)$ souvent $\begin{smallmatrix} \text{non} \\ \text{coeff.} \end{smallmatrix}$ négative.

Références classiques: Beutjes 81, Schweiger 2000.

version projective sur le domaine compacte $\Delta = \{x \in \Lambda: \|x\| = 1\}$

$$f: \Delta \rightarrow \Delta$$

$$x \mapsto \frac{F(x)}{\|F(x)\|}$$

Exemples Brun₃: "soustraire la médiane à la + grande"

$[d=3]$ $\Lambda = \mathbb{R}_+^3$

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

t.g. ~~si~~ si ~~permutation~~ π est la permutation t.g.

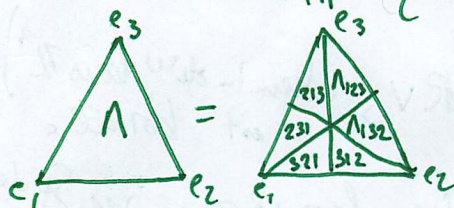
$x_{\pi 1} < x_{\pi 2} < x_{\pi 3}$ alors

$$\begin{cases} x'_{\pi 1} = x_{\pi 1} \\ x'_{\pi 2} = x_{\pi 2} \\ x'_{\pi 3} = x_{\pi 3} - x_{\pi 2} \end{cases}$$

$$(3, 5, 7) \xrightarrow{F} (3, 5, 2) \xrightarrow{F} (3, 2, 2) \xrightarrow{F} (1, 2, 2) \xrightarrow{F} (1, 2, 0) \xrightarrow{F} (1, 0, 0) \xrightarrow{F} (0, 0, 0)$$

version matricielle: Partition de $\Lambda = \bigcup_{\pi \in S_3} \Lambda_\pi$

avec $\Lambda_\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda \mid x_{\pi 1} < x_{\pi 2} < x_{\pi 3}\}$

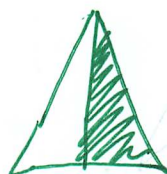


$$M(x) = B_\pi \text{ si } x \in \Lambda_\pi$$

$$B_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{231} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{132} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{213} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, B_{312} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, B_{321} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $F(\Lambda_{123}) = \Lambda_{123} \cup \Lambda_{132} \cup \Lambda_{312}$



(attention, c'est en projectif)

Thm (Brun, 1957) Cet algo détecte les dépendances linéaires.

Approximations de phase simultanée

Soit $V \in \mathbb{R}^d$ t.g. $\dim_{\mathbb{Q}}(V) = d$.

On considère l'orbite $V \xrightarrow{F} F(V) \xrightarrow{F} F^2(V) \xrightarrow{F} F^3(V) \rightarrow \dots$

~~Les colonnes de la suite des colonnes des matrices forment~~
des approximations simultanées de V :

$$\left(M(V) \cdot M(F(V)) \cdot M(F^2(V)) \cdot \dots \cdot M(F^n(V)) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

[Ex] $F^0(V) = (1, \pi, \sqrt{2}) \in \Lambda_{132}$
 $F(V) = \in \Lambda_{132}$
 $F^2(V) = \in \Lambda_{213}$
 $F^3(V) = \in \Lambda_{231}$
 $F^4(V) = \in \Lambda_{231}$
 $F^5(V) = \in \Lambda_{123}$
 $F^6(V) = \in \Lambda_{312}$
 $F^7(V) = \in \Lambda_{321}$
 $F^8(V) = \in \Lambda_{132}$
 $F^9(V) = \in \Lambda_{123}$
 $F^{10}(V) = \in \Lambda_{123}$

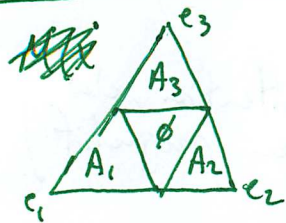
$$\begin{aligned} M(V) &= B_{132} \\ M(V) \cdot M(FV) &= B_{132} B_{132} \\ M(V) \dots M(F^2V) &= B_{132} B_{132} B_{213} \\ &\quad B_{132} B_{132} B_{213} B_{231} \\ &\quad \text{--- } 11 \text{ --- } B_{231} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 9 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 16 & 22 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 14 & 7 \\ 9 & 60 & 22 \\ 4 & 27 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M(V) \dots M(F^{20}V) = \begin{pmatrix} 565 & 48 & 99 \\ 1775 & 151 & 311 \\ 799 & 68 & 140 \end{pmatrix}$$

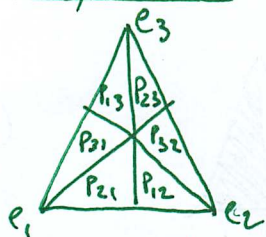
$$M(V) \dots M(F^{50}V) = \begin{pmatrix} 617172 & 561406 & 95697 \\ 1938903 & 1763709 & 300641 \\ 872813 & 793948 & 135336 \end{pmatrix}$$

Déf Un algo est faiblement convergent
 si $\text{diam}_{\Delta} M(V) \dots M(F^n V) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\forall V)$.

Algorithme Arnaud Rauzy Poincaré $\Lambda = \mathbb{R}_+^3$



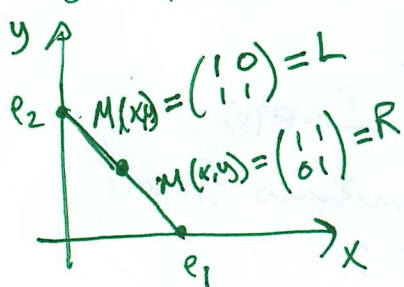
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$



$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

$$M(x) = \begin{cases} A_k & \text{si } x \in A_k \Lambda \\ P_{jk} & \text{si } x \in P_{jk} \Lambda \end{cases}$$

Farey map $\Lambda = \mathbb{R}_+^2$



$$F: \Lambda \rightarrow \Lambda$$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x, y-x) & \text{si } x < y \\ (x-y, y) & \text{si } x > y \end{cases}$$

$$= M(x,y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$v =$$

$$F(v) =$$

$$F^2(v) =$$

$$F^3(v) =$$

$$F^4(v) =$$

$$F^5(v) =$$

$$F^6(v) =$$

$$F^7(v) =$$

$$F^8(v) =$$

$$F^9(v) =$$

$$M(v) =$$

$$M(v) \cdot M(Fv) =$$

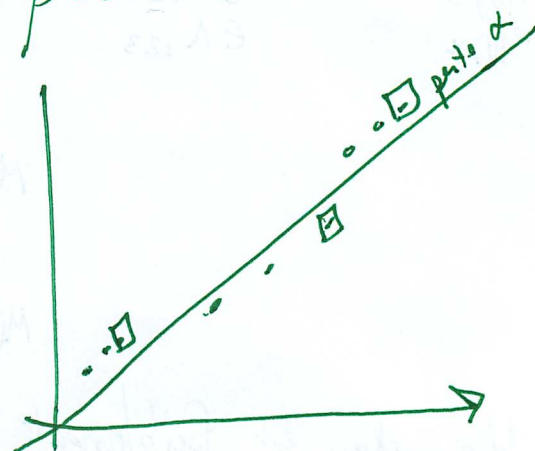
$$M(v) \cdots M(F^2v) =$$

$$M(v) \cdots M(F^3v) =$$

$$M(v) \cdots M(F^4v) =$$

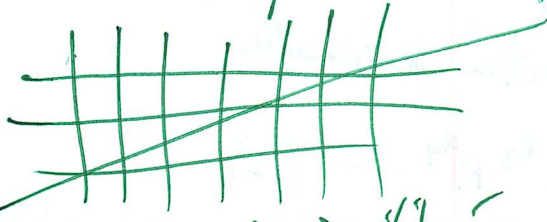
Dev. fract. continue de la pente:

$$\alpha =$$



Mots Sturmiens # définitions

- Mot de complexité $p(n) = n+1$
- Mot de billard (séquence de coupe)



- Mot aperiodique (équilibre)

- Chemins dans $0 < ax + by \leq |a| + |b|$

- ~~Mot~~ $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots (1)$

$$L = \begin{cases} 0 \rightarrow 0 \\ 1 \rightarrow 01 \end{cases} \quad R = \begin{cases} 0 \rightarrow 10 \\ 1 \rightarrow 1 \end{cases}$$

- Codage de notations.

Mots sturmien # définitions équivalentes

- Mots de complexité $2n+1$
- Mots aperiodiques 1-équilibrés
- Mots de billard
- Codage de rotation irrationnelles

$$W = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} R^{a_4} \dots (1)$$

$$\text{où } R = \begin{cases} 0 \mapsto 10 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases} \text{ et } L = \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 01 \end{cases}$$

$$\text{et } \alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

est le dev. frac. cont. de α

Mots d'Arnoux - Rauzy - Poincaré

Génération du mot de direction $v \in \mathbb{R}_+^3$.

$$x \in \Lambda = \mathbb{R}_+^3 \quad \sigma(x) = \begin{cases} \alpha_k & \text{si } x \in A_k \Lambda \\ \pi_{jk} & \text{si } x \in P_{jk} \Lambda \end{cases}$$

$$\alpha_k = \begin{cases} i \mapsto ik \\ j \mapsto jk \\ k \mapsto k \end{cases} \quad \text{et} \quad \pi_{jk} = \begin{cases} i \mapsto ijk \\ j \mapsto jk \\ k \mapsto k \end{cases} \quad \text{pour toute permutation } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$$

et finalement

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sigma(v) \circ \sigma(F(v)) \circ \sigma(F^2 v) \circ \dots \circ \sigma(F^n v)] (1)$$

est le mot de direction v engendré par l'algo ARP.