Liège, 29/01/2015

Une extension d-dimensionnelle des mots de Christoffel

avec C. Reutenauer
arxiv: 1404.4021

Introduction – Motivations

géométrie digitale $\xleftrightarrow{\text{relations}}$ combinatoire des mots

Combinatoire des mots : Mots de Lyndon et mots de Christoffel

<u>Def</u> Un <u>mot de Lyndon</u> est un mot qui est + petit lexicographiquement que ses permutations circulaires.

<u>ex</u> atoire = $\min_{lex}$ {atoire, toirea, oireat, ireato, reatoi, eatoir}

<u>Thm</u> (Lyndon, 1954) Tout mot w non vide admet une unique factorisation comme une suite de mots de Lyndon décroissant lexico.m-t :

$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}, \quad l_1 > l_2 > \cdots > l_k$$

où $n_i \geq 1$ et l_i est un mot de Lyndon $\forall i$, $1 \leq i \leq k$.

<u>ex</u> (com) (bin) (atoire)

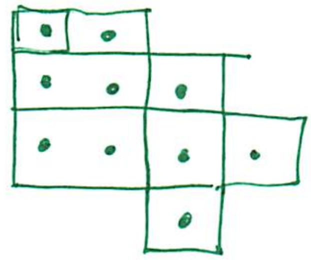
<u>Def</u> Mot de Christoffel $\{$ de segment discret $(0,0)$ à (p,q) p,q copremiers.

$w = a b a b b a b b$

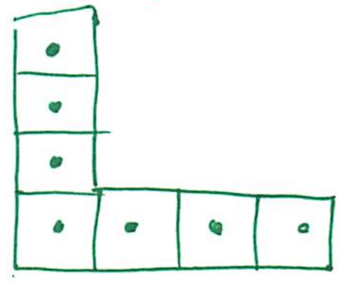
Géométrie digitale – convexité

Quand est-ce que $P \subseteq \mathbb{Z}^2$ polyomino est convexe ?

ex :



,



Def $P \subseteq \mathbb{Z}^2$ est convexe si

$$\mathrm{conv}(P) \cap \mathbb{Z}^2 \subseteq P.$$

enveloppe convexe

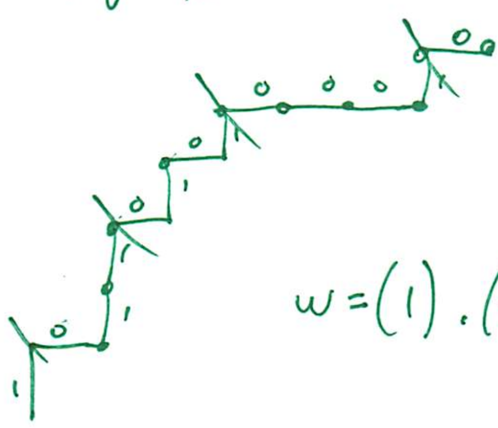
Théorème (Brlek, Lachaud, Provençal, Reutenauer, 2009)

Un mot $w \in \{0,1\}^*$ décrit un chemin NE-convexe si et seulement si son unique factorisation de Lyndon

$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$$

est t.q. tous les l_i sont des mots de Christoffel.

EX.



$$w = (1)\cdot(011)\cdot(01)^2\cdot(0001)\cdot(0)$$

chemin NE-convexe