S. Labbé
Sherbrooke
17 nov. 2014

Calcul de mesure invariante d'algo de fractions continues multidimensionnelles

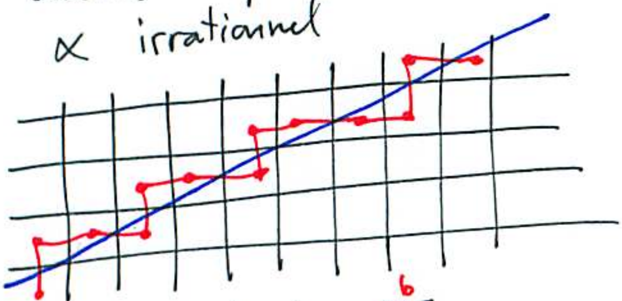
Motivations la géométrie discrète (digitale)

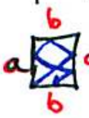
But: trouver l'équivalent de la géométrie euclidienne dans $\mathbb{Z}^n$

	Géométrie euclidienne	Géométrie discrète	
	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^n$ MCFA ③
espace			
droite	$\{P+\vec{a}K \mid K\in\mathbb{R}\}, P,\vec{a}\in\mathbb{R}^n$	① sturmiens, mot. de C. $\{\vec{x} \mid 0\leq \vec{a}\cdot\vec{x}<\lVert\vec{a}\rVert_1\}$	→ plans discrets ②
hyperplans	$\vec{a}\cdot\vec{x}=0$	⋮	⋮
courbes	$x^2+y^2=R^2$		
surfaces		Lyndon + Christoffel	
propriétés, etc	convexité		

① droites de pente α dans $\mathbb{Z}^2$

α irrationnel



≅ Mot de billard 

$W = baabaabaaaba$ $\xrightarrow{a} b$?

Mot sturmien $p(n)=n+1$

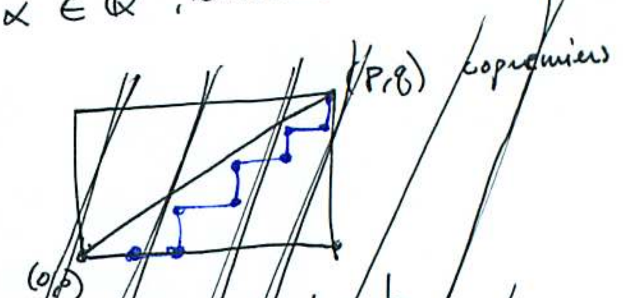
n	0	1	2	3
$\mathcal{L}_n(W)$	$\{\varepsilon\}$	$\{a,b\}$	$\{ba,aa,ab\}$	$\{baa,aab,aba,aaa\}$

$p(n) = \mathrm{Card}\,\mathcal{L}_n(W) = n+1$

$D_\alpha = \{(0,0),(0,1),(1,1),(2,1),\dots\} \subseteq \mathbb{Z}^2$

$D_\alpha = \{\vec{x}\in\mathbb{Z}^2 \mid 0\leq\vec{a}\cdot\vec{x}<\lVert\vec{a}\rVert_1\}$

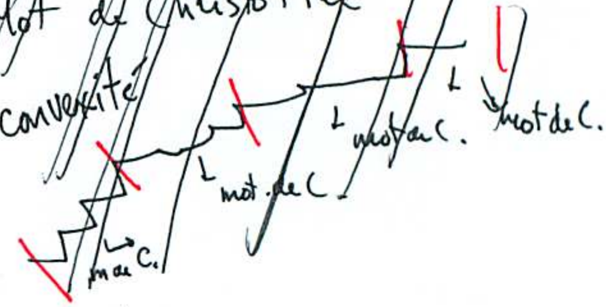
$\alpha\in\mathbb{Q}$, rationnel



$w = aabababab$

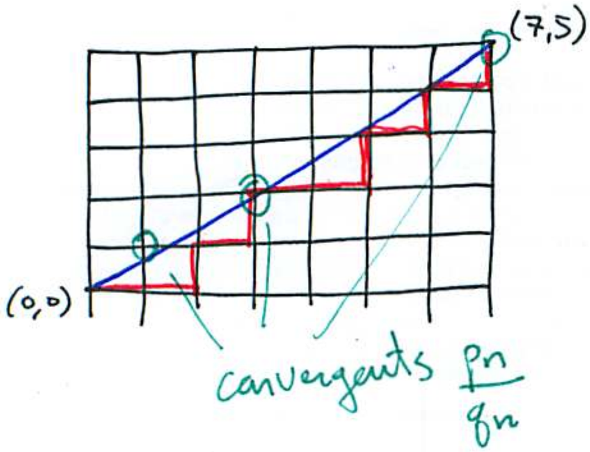
Mot de Christoffel

convexité



voir verso

Segments discrets rationnels et fraction continues



Mot de Christoffel

$$W = a|a\,b|a\,b|a|a\,b|a\,b|a\,.\,b|$$

$$= \begin{pmatrix} a \to a \\ b \to ab \end{pmatrix} (a\,b|b|a\,b|b|b)$$

$$= \begin{pmatrix} a \to a \\ b \to ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \mapsto ab \\ b \mapsto b \end{pmatrix} (a\,b|a\,b|b)$$

$$= \text{———} \,||\, \text{———} \begin{pmatrix} a \to ab \\ b \to b \end{pmatrix} (a|a\,b)$$

$$\begin{pmatrix} a \to a \\ b \to ab \end{pmatrix} (a\,b)$$

$$\begin{pmatrix} a \to a \\ b \to ab \end{pmatrix} (b)$$

$$=$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ ab \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} ab \\ b \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a \\ ab \end{pmatrix}^2 (b)$$

Matriciellement:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Algo d'Euclide:

$$7 = \boxed{1} \cdot 5 + 2$$
$$5 = \boxed{2} \cdot 2 + 1$$
$$2 = \boxed{2} \cdot 1 + 0$$

Donc

$$\frac{5}{7} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

Convergents $\frac{p_n}{q_n}$

$$0 + \frac{1}{1} = 1, \quad 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{5}{7}$$

② Hyperplans dans $\mathbb{Z}^n$

→ Surface de l'ensemble des cubes qui intersectent un hyperplan euclidien.

→ On obtient un pavage apériodique de losanges si le vecteur normal $\vec{a}$ est totalement irrationnel.

→ Quasi cristaux (D. Gratias)

→ si $\vec{a} \in \mathbb{Z}^n$, $G_{\vec{a}}$ graphe de Christoffel [Labbé, Reutenauer, 2014]

↳ Surface 3D

↳ MCF

③ Droites dans $\mathbb{Z}^n$

→ Mot de billard 3D, $p(n) = n^2 + n + 1$ [Arnoux, Mauduit, Shiokawa, Tamura, 1992]

Thm (Berthé, L., 2014) Pour $\vec{a} \in \mathbb{R}^3_+$ tot. irrat., on construit un mot ~~tel que~~ infini $w_{\vec{a}}$ sur l'alphabet $\{1,2,3\}$ t.q. les fréquences des lettres dans $w_{\vec{a}}$ existent et égales à $\vec{a}$ et t.q. $2n+1 \le p(n) \le \frac{5}{2}n+1$.

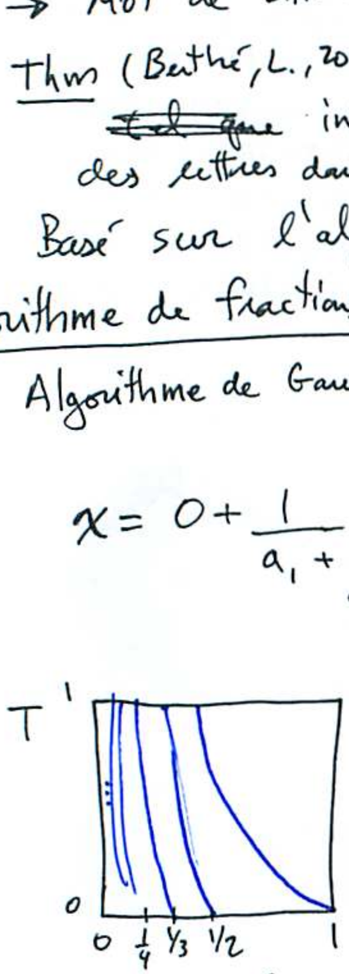
Basé sur l'algorithme de fract. contin. multidim. Arnoux-Rauzy/Poincaré.

Algorithme de fractions continues

Algorithme de Gauss : $T : [0,1] \to [0,1]$

$$x \mapsto \begin{cases} \{\frac{1}{x}\} = \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x = 0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \qquad Tx = 0 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 \cdots}}}$$

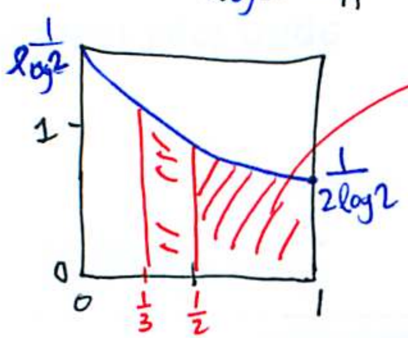


Les propriétés des fract. continues sont étudiées via l'algo T.

- temps moyen d'exécution de l'algo d'Euclide [Brigitte Vallée et al 1990...] → $\frac{12 \log 2}{\pi^2} \log N$ pour des paires d'entiers $\le N$
- la distribution des a_i est ~~[illegible]~~ donnée par la loi de Gauss

T préserve la mesure de Gauss ν

$$\nu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{1}{x+1} \, d\lambda(x)$$



$a_i = \begin{cases} 1 & \text{à } 41\% \\ 2 & \text{à } 17\% \\ 3 & \text{à } 9\% \\ 4 & \text{à } 5{,}9\% \\ \text{etc} & \end{cases}$

Algorithme de fractions continues multidimensionnelles

cône $\Lambda \subseteq \mathbb{R}_+^n$

$$F : \Lambda \to \Lambda$$
$$\vec{x} \mapsto [M(\vec{x})]^{-1} \vec{x}$$

où $M : \Lambda \to GL_n(\mathbb{R})$ est
$\vec{x} \mapsto M(\vec{x})$
- constante par morceau
- qui commute avec les homothéties
- $M(\vec{x})$ inversible

Références : Schweiger 2000, Brentjes 1981

Version projective : sur $\Delta = \{\vec{x} \in \Lambda \mid \|\vec{x}\| = 1\}$

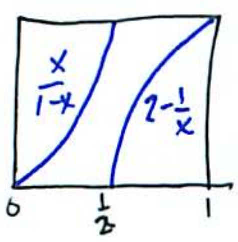
$$f : \Delta \to \Delta$$
$$\vec{x} \mapsto \frac{F(\vec{x})}{\|F(\vec{x})\|}$$

$\boxed{\text{EX}}$ Farey, $\Lambda = \mathbb{R}_+^2$

$$F : \Lambda \to \Lambda$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x, y-x) & \text{si } x<y \\ (x-y, y) & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{si } x<y \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(7,5) \xrightarrow{F} (2,5) \xrightarrow{F} (2,3) \xrightarrow{F} (2,1) \to \text{etc...}$$
$$\left(\tfrac{7}{5}, 1\right) \xrightarrow{F} \left(\tfrac{2}{5}, 1\right) \xrightarrow{F} \left(\tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}\right) \xrightarrow{F}$$

v. proj. (première coord.) : $f : [0,1] \to [0,1]$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\left(\tfrac{7}{12}, \tfrac{5}{12}\right) \xrightarrow{f} \left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{5}{7}\right) \xrightarrow{f} \left(\tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}\right) \xrightarrow{f} \text{etc}$$

$\boxed{\text{EX}}$ Brun, Selmer, Poincaré, Meester, ...

Arnoux-Rauzy = pas un algo
Poincaré = plutôt mauvais
} Arnoux-Rauzy-Poincaré très bon !

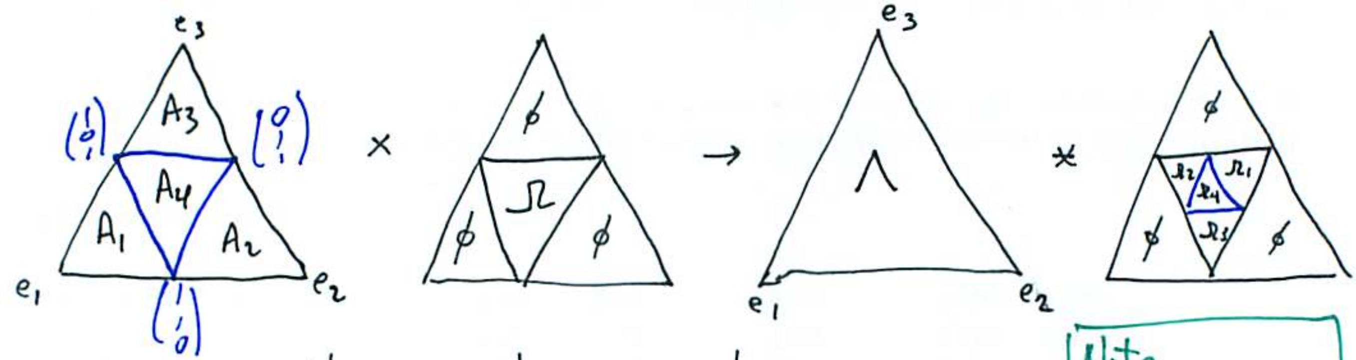
Problème de Hermite : Généraliser le thm de Lagrange
- α rationnel $\Leftrightarrow$ dév. décimal périodique
- α quadratique $\Leftrightarrow$ dév. fract. continue évent. périodique
- α cubique $\Leftrightarrow$ dév. MCF périodique ?

Arnoux-Rauzy Revert

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 1&1&1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0&1/2&1/2 \\ 1/2&0&1/2 \\ 1/2&1/2&0 \end{pmatrix}$$

$$M : \Lambda \longrightarrow GL(3,\mathbb{Q}) \qquad \Lambda = \mathbb{R}^3_+$$

$$x \longmapsto A_i \quad \text{ssi} \quad x \in A_i \cdot \Lambda = \Lambda_i$$



densité invariante : $\dfrac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}$

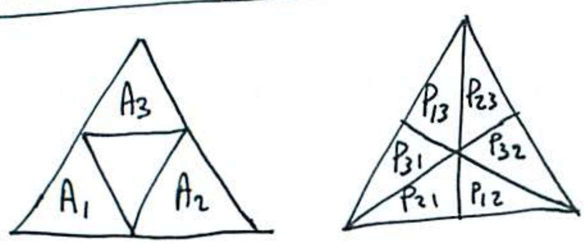
Note

$A_i \Lambda = \Lambda_i$

$\Updownarrow$

$\Lambda = A_i^{-1} \Lambda_i$

Arnoux-Rauzy-Poincaré



$$P_{21} = \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \qquad P_{13} = \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&0 \\ 1&1&1 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \qquad P_{32} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&1 \\ 1&0&1 \end{pmatrix}$$

$$P_{31} = \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&0 \\ 0&1&1 \end{pmatrix} \qquad P_{23} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&0 \\ 1&1&1 \end{pmatrix}$$

$$M : \Lambda \longrightarrow GL(3,\mathbb{Q})$$

$$\vec{x} \longmapsto \begin{cases} A_k & \text{si } \vec{x} \in A_k \Lambda \text{ pour } k=1,2,3 \\ P_{jk} & \text{sinon et si } \vec{x} \in P_{jk}\Lambda \text{ pour } \{i,j,k\} = \{1,2,3\} \end{cases}$$

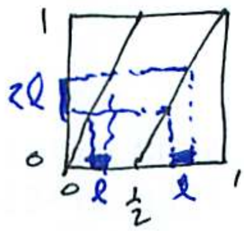
Mesure invariante

Déf μ est une mesure invariante pour T si
$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$$
pour tout ensemble mesurable A.

$\boxed{\text{EX}}$ $T : [0,1] \to [0,1]$

$x \mapsto 2x \bmod 1$

préserve la mesure de Lebesgue

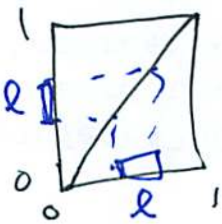


jacobien 2

$\boxed{\text{EX}}$ $T : [0,1] \to [0,1]$

$x \mapsto x$

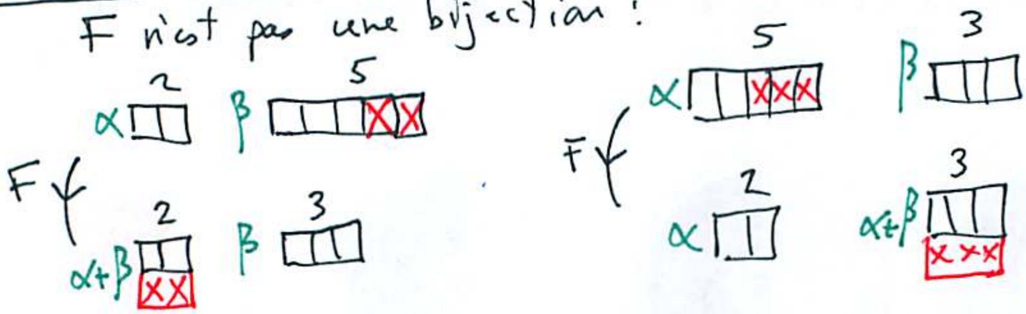
préserve la mesure de Lebesgue



jacobien 1

Extension naturelle

F n'est pas une bijection :



$$\tilde{F} : (x,y,\alpha,\beta) \mapsto \begin{cases} (x,\, y-x,\, \alpha+\beta,\, \beta) & \text{si } x<y \\ (x-y,\, y,\, \alpha,\, \alpha+\beta) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} & \text{si } x<y \\[2ex] \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{\alpha} \end{pmatrix} \mapsto \left\{ \begin{pmatrix} [M(x)]^{-1} & 0 \\ 0 & M(x)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{\alpha} \end{pmatrix} \right.$$

- $\tilde F$ préserve ~~la~~ mesure de Lebesgue (jacobien 1)
- $\tilde F$ préserve la forme $x\alpha + y\beta$

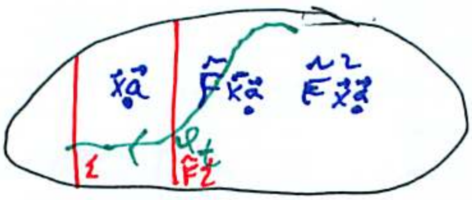
<u>Flot</u>: $\varphi_t : (x, y, \alpha, \beta) \mapsto (xe^t, ye^t, \alpha e^{-t}, \beta e^{-t})$

- φ_t préserve la mesure de Lebesgue (jacobien 1)
- —〃— la forme $x\alpha + y\beta$
- $\varphi_t \circ \tilde F = \tilde F \circ \varphi_t$

domaine $D = \{ (x, y, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^4 \mid x\alpha + y\beta = 1 \}$

sur lequel $\tilde F$ et φ_t sont bien définis

D



$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\tilde F^n"] \arrow[d, "\varphi_t"'] & y \arrow[d, "\varphi_t"] \\ \varphi_t(x) \arrow[r, "\tilde F^n"] & \varphi_t(y) \end{tikzcd} \Rightarrow D/\tilde F$$

le flot φ_t sur $D/\tilde F$ "les orbites"

On considère la section Σ

$$\Sigma = \{ (x, y, \alpha, \beta) \in D \mid x + y = 1 \}$$

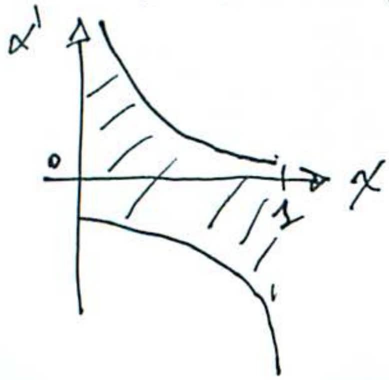
$\tilde f : \Sigma \to \Sigma$ = fct. de premier retour à Σ du flot φ_t défini sur $D/\tilde F$

$= \varphi_{t(\tilde x, \vec\alpha)} \circ \tilde F$ qui préserve la mes. de Lebesgue dont l'effet sur la coord. x est $f(x)$

$$\Sigma = \{ (x, y, \alpha, \beta) \mid x > 0, y > 0, \alpha > 0, \beta > 0, x\alpha + y\beta = 1, x + y = 1 \}$$

$$\downarrow \begin{array}{l} \alpha' = \alpha - \beta \\ t = \log(x+y) \\ e = x\alpha + y\beta \end{array}$$

$$\Sigma' = \{ (x, \alpha', 0, 1) \mid \alpha' + \beta > 0, \beta > 0, x\alpha' + \beta = 1 \}$$
$$= \{ (x, \alpha', 0, 1) \mid \frac{1}{x-1} < \alpha' < \frac{1}{x} \}$$



$$\delta(x) = \int_{\frac{1}{x-1}}^{\frac{1}{x}} 1 \, d\alpha' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

est la mesure inv. ~~abs~~ cont. p/r à Lebesgue de G

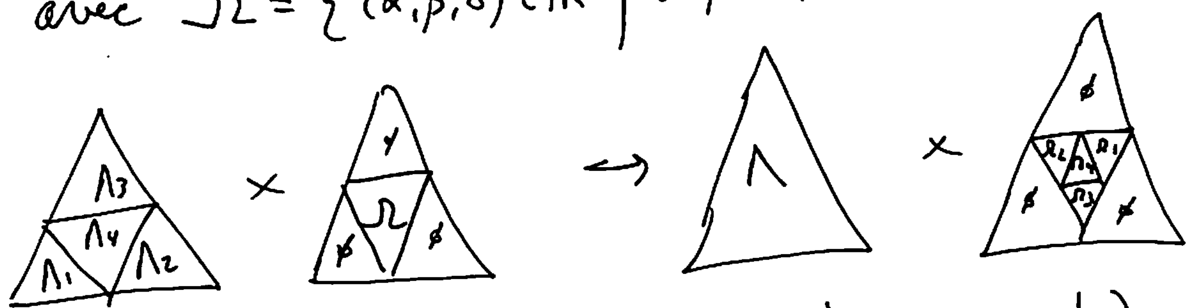
Arnoux-Rauzy-Rvert

avec $\tilde{F} : \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{a} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} M(x)^{-1} & \\ & M(x)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ a \end{pmatrix}$

Lemme • $\tilde{F}$ est une bijection de $\Lambda_i \times \Omega \to \Lambda \times \Omega_i$, $i = 1,2,3,4$

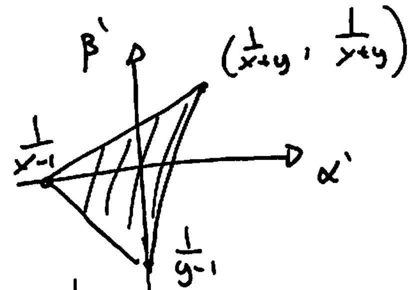
• $\tilde{F}$ —— " —— $\Lambda \times \Omega \to \Lambda \times \Omega$

avec $\Omega = \{ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha + \beta > \gamma, \alpha + \gamma > \beta, \beta + \gamma > \alpha \}$



[...]

mesure inv. = aire de



$$= \frac{1}{(x+y)(1-x)(1-y)} = \frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}$$

Arnoux Rauzy Poincaré

Lemme $f : \Delta \to \Delta$ version accélérée de ARP

Z un n-cylindre de f

Alors $$\frac{\sup_{\vec{x} \in Z} |J f^n(\vec{x})|}{\inf_{\vec{x} \in Z} |J f^n(\vec{x})|} \leq 64$$

Cor f est ergodique et possède une mesure invariante abs. conts p/r à Lebesgue

mais on ne sait pas la calculer

le domaine de l'extension naturelle est fractal