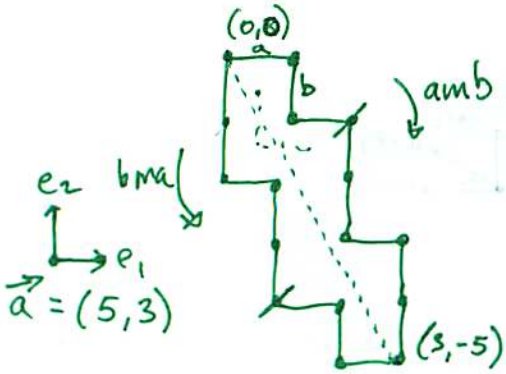
A d-dimensional extension of Christoffel words

with C. Reutenauer
arxiv : 1404 : 4021
+dessins : voir aussi Halifax

Christoffel words

Def1 (chemin)

$$W_{\vec{a}} = a.\underbrace{babbab}_{m \text{ est un palindrome}}.b$$



Def2 (codage de Cayley graph)

Groupe $\mathbb{Z}_8$ avec générateur 5.

$$0 \xrightarrow[a]{+5} 5 \xrightarrow[b]{} 2 \xrightarrow[a]{} 7 \xrightarrow[b]{} 4 \xrightarrow[b]{} 1 \xrightarrow[a]{} 6 \xrightarrow[b]{} 3 \xrightarrow[b]{} 0$$

→ Voir Berstel (2007) pour 14 characterisations ou CRM Book.

THM (Pirillo, 2001) $amb \in \{a,b\}^*$ est un mot de Christoffel $\Leftrightarrow$ amb et bma sont conjugués.

$\boxed{EX}$ ($\Rightarrow$) $bma = b.babb|ab.a$

($\Leftarrow$) sp. que amb est le 3^e conjugué de bma et $|m| = 9$

$$amb = a\, m_1\, m_2\, m_3\, m_4\, m_5\, m_6\, m_7\, m_8\, m_9\, b$$
$$m_3\, m_4\, m_5\, m_6\, m_7\, m_8\, m_9\, a\, b\, m_1\, m_2$$

Alors $a = m_3 = m_6 = m_9 = m_1 = m_4 = m_7 = a$
$b = m_2 = m_5 = m_8 = b$

Donc, $amb = a.abaabaaba.b$ c'est un C. word.

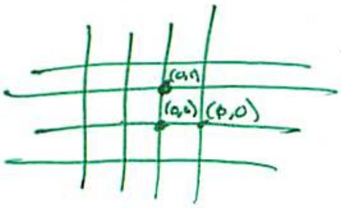
~~Christoffel Graphs~~

~~Let $\vec{a} \in \mathbb{N}^d$ with $d \geq 2$.~~

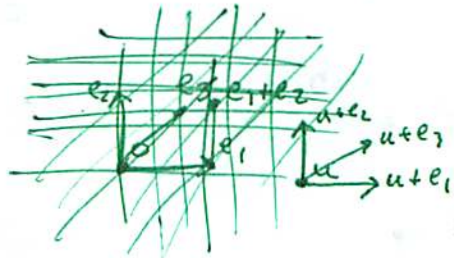
~~Let $s = \|\vec{a}\| = \sum a_i$.~~

Hypercubic lattice

$$\mathbb{E}_d = \{ (u, u+e_i) \mid u \in \mathbb{Z}^d,\ 1 \leq i \leq d \}$$



$\mathbb{E}_2$



$\mathbb{E}_3$

Christoffel Graph

Let $\vec{a} \in \mathbb{N}^d$ with $d \geq 2$.

Let $s = \|\vec{a}\| = \sum a_i$.

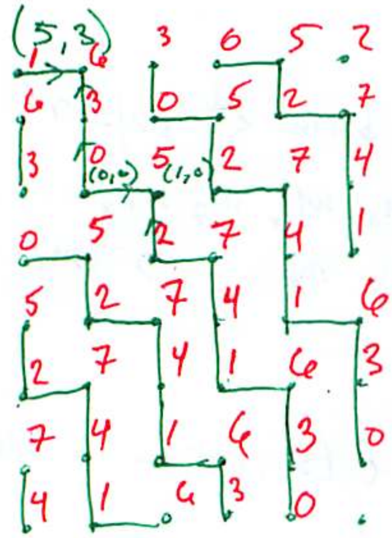
$$F_{\vec{a}} : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$$

$$\vec{x} \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{x} \bmod s = \sum a_i x_i \bmod s$$

Le christoffel Graph de vecteur normal $\vec{a}$ est

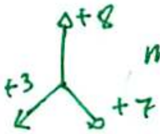
$$H_{\vec{a}} = \{ (u, u+e_i) \in \mathbb{E}_d \mid F_{\vec{a}}(u) < F_{\vec{a}}(u+e_i) \}$$

$\boxed{\text{EX}}$ $\vec{a} = (5,3)$

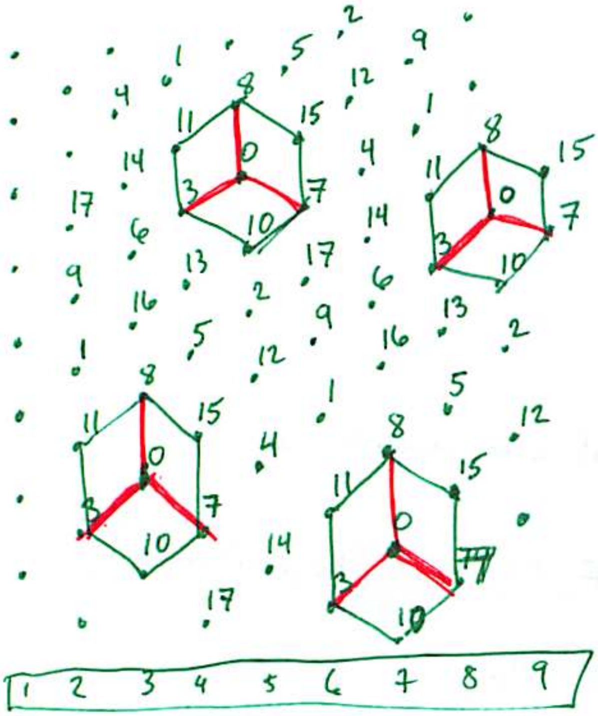


Lemme $H_{\vec{a}}$ est invariant par la translation $\underbrace{(1, 1, \ldots 1)}_{= \sum e_i}$.

$\boxed{EX}$ $\vec{a} = (3,7,8)$



mod 18



Parties du corps (Biologie)

- Edges of $\mathbb{E}_d$ incident to zero:

$$Q = \{ (u,v) \in \mathbb{E}_d : F_{\vec{a}}(u) = 0 \text{ or } F_{\vec{a}}(v) = 0 \}$$

- Legs of $X \subseteq \mathbb{E}_d$ are the edges of

$$X \cap Q$$

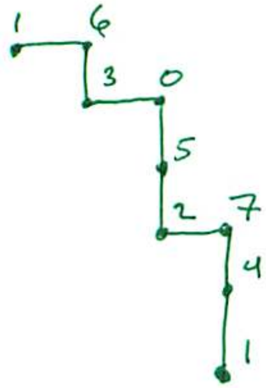
- The body of $X \subseteq \mathbb{E}_d$ is the set

$$X \setminus Q$$

Opérations $X \subseteq \mathbb{E}_d$. $t \in \mathbb{Z}^d$

- Reversal $-X = \{ (-v, -u) \mid (u,v) \in X \}$
- Translate $X + t = \{ (u+t, v+t) \mid (u,v) \in X \}$
- FLIP $\mathrm{FLIP}(X) = (X \setminus Q) \cup (Q \setminus X)$

$\boxed{\text{EX}}$ $\vec{a} = (5,3)$ $\qquad$ $\mathrm{FLIP}(H_{\vec{a}}) = \emptyset$



$\boxed{\text{EX}}$ $\vec{a} = (3,7,8)$ $\qquad$ exemple fait sur dessin précédent

<u>Proposition</u> Soit $t \in \mathbb{Z}^d$ t.q. $F_a(t) = 1$ (bezout vector).

$$H_{\vec{a}} + t = \mathrm{FLIP}(H_{\vec{a}})$$

→ généralise le fait que amb soit conjugué à bma.

Aussi propriétés non characteristic:

central word are palindrome	body of H_a is symmetric $-(H_a \backslash Q) = H_{\vec{a}} \backslash Q$
$\widetilde{amb} = bma$	reversal of H_a = its FLIP $-H_{\vec{a}} = \mathrm{FLIP}(H_a)$
amb conjugate to its reversal $\widetilde{amb}$	$-H_{\vec{a}} = H_{\vec{a}} + t$

<u>What about the converse?</u>

- K s/gp of finite index of $\mathbb{Z}^d$ s.t. $\sum e_i \in K$
- $M \subseteq \mathbb{E}_d$ invariant by translations in K
- $Q = \{ (u,v) \in \mathbb{E}_d \mid u \in K \text{ or } v \in K \}$

$$(\exists t \in \mathbb{Z}^d) \text{ s.t } \mathrm{FLIP}(M) = M + t \Rightarrow M = H_{\vec{a}} \, ?$$

~~Ex $\vec{a} \in (SB)$~~

Let $\vec{a} \in \mathbb{N}^d$ with $d \geq 2$.

Let w, <u>width</u>, be a divisor of $\|a\| = \sum a_i$ s.t. $0 < \frac{\|a\|}{w} < d$

$$F_{\vec{a},w} : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}/w\mathbb{Z}$$
$$\vec{x} \mapsto \vec{a}\cdot\vec{x} \mod w$$

<u>Christoffel Graph normal vector $\vec{a}$ of width w</u>

$$H_{\vec{a},w} = \left\{ (u, u+e_i) \in E_d \;\middle|\; F_{\vec{a},w}(u) < F_{\vec{a},w}(u+e_i) \right\}$$

<u>Theorem</u>

- K s/gp of finite index of $\mathbb{Z}^d$ s.t. $\sum e_i \in K$
- $M \subseteq E_d$ inv. by translations in K
- $Q = \{(u,v) \in E_d \mid u \in K \text{ or } v \in K\}$

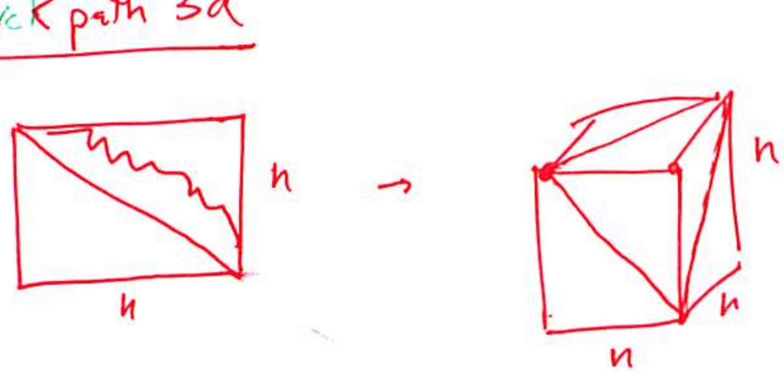
• Sp. legs of M are positive

$M \cap Q = \{(0,e_i) \mid 1 \leq i \leq d\} + K$

$(\exists t \in \mathbb{Z}^d)$ s.t. $FLIP(M) = M + t \iff$

$M = H_{\vec{a},w}$ where $0 < s/w < d$.

<u>Dyck path 3d</u>



n	1	2	3	4	5	6	→ Sloane
C_n	1	2	9	96	2498	161422	A115965

"Number of planar subpartitions of size n pyramidal planar partitions".

$\frac{\|\vec{a}\|}{\omega}$ \ d	2	3	4	5
1	$H_{\vec{a}}$	$H_{\vec{a}}$	$H_{\vec{a}}$	$H_{\vec{a}}$
2	$\emptyset$	$H_{\vec{a}, \frac{\|\vec{a}\|}{2}}$	$H_{\vec{a}, \frac{\|\vec{a}\|}{2}}$	$H_{\vec{a}, \frac{\|\vec{a}\|}{2}}$
3	$\emptyset$	$\emptyset$	$H_{\vec{a}, \frac{\|\vec{a}\|}{3}}$	$H_{\vec{a}, \frac{\|\vec{a}\|}{3}}$
4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$H_{\vec{a}, \frac{\|\vec{a}\|}{4}}$

?

corps est un complément l'un de l'autre

Les mots de Christoffel sont les seuls graphes de Christoffel tel que leur complément dans $\mathbb{E}_d$ est aussi un ~~gug~~ mot de Christoffel.