7 octobre 2014
Séminaire Ernest
Mesure invariante algo MCF

S. Labbé

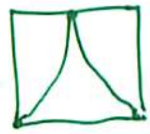
Algo additif fract. cont.

cône $\Lambda = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y \}$

$$F : (x,y) \mapsto \begin{cases} (x, y-x) & \text{si } x < y-x \\ (y-x, x) & \text{sinon} \end{cases}$$

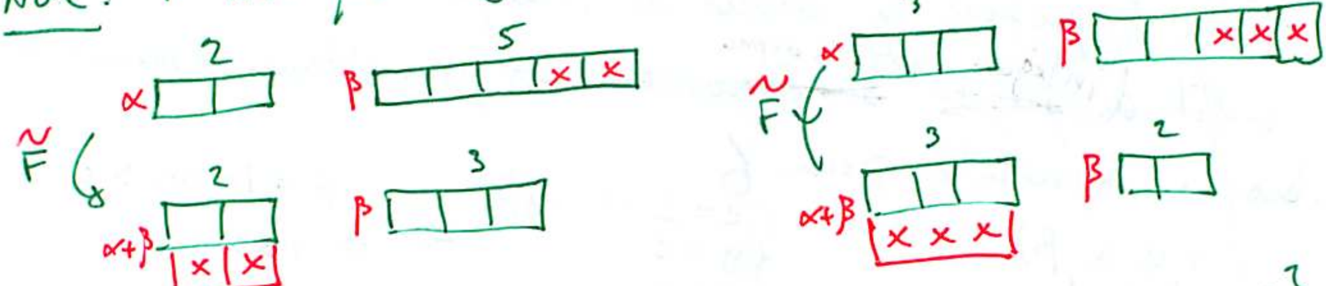
version projective (Farey)

$$f(x,y) = \frac{F(x,y)}{\|F(x,y)\|_0} \quad ; \quad f : [0,1] \to [0,1], \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1-x}{x} & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$



On cherche la mesure invariante pour f.

<u>Note</u> : F n'est pas bijective :



<u>Extension naturelle</u>

$$D = \{ (x,y,\alpha,\beta) \mid x\alpha + y\beta = 1,\ 0 < x < y,\ 0 < \alpha,\ 0 < \beta \}$$

$$\tilde{F} : (x,y,\alpha,\beta) \longmapsto \begin{cases} (x, y-x, \alpha+\beta, \beta) & \text{si } y < y-x \\ (y-x, x, \beta, \alpha+\beta) & \text{si } y-x < x \end{cases}$$

On obtient deux matrices :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ de la forme } \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{+} \end{pmatrix}$$

- $\tilde{F}$ est une bijection sur D
- $\hat{F}$ préserve la mesure de Lebesgue (jacobien = 1)
- $\tilde{F}$ préserve la forme $x\alpha + y\beta$ (aire totale des tours)

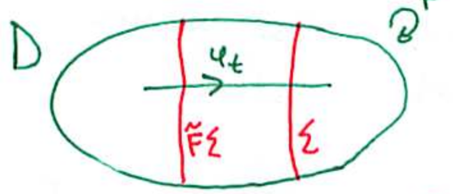
On introduit le flot

$$\varphi_t : (x,y,\alpha,\beta) \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} & & & 0 \\ & e^{-t} & & \\ & & e^{t} & \\ 0 & & & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

- φ_t a un jacobien 1, donc préserve la mesure de Lebesgue
- φ_t préserve la forme $x\alpha + y\beta$, donc est bien défini sur D
- φ_t commute avec $\tilde{F}$

Donc φ_t envoit les orbites par $\tilde{F}$ sur d'autres orbites

$$\begin{array}{ccc} \vec{x} & \xrightarrow{\tilde{F}^n} & \vec{y} \\ \downarrow \varphi_t & & \downarrow \varphi_t \\ \varphi_t(\vec{x}) & \xrightarrow{\tilde{F}^n} & \varphi_t(\vec{y}) \end{array}$$



- On considère le flot induit sur $\Omega = D/\tilde{F}$ par φ_t
- On considère une surface de section Σ pour le flot $(y = 1)$
- On considère l'application $\tilde{\mathcal{G}} : \Sigma \to \Sigma$ de premier retour du flot en Σ dont l'effet sur la coord. x est exactement celui de $\mathcal{G}$
- Donc $\tilde{\mathcal{G}}$ préserve la mesure de Lebesgue sur les coord (x,α)

Il suffit d'intégrer ~~projeter~~ p/r à alpha ~~sur la coordonnée x~~ pour obtenir la mesure de Lebesgue invariante pour $\mathcal{G}$.

$$(x,y,\alpha,\beta)$$

$$\Big\downarrow \ \tau = \log y \ , e = x\alpha + y\beta$$

$$(x,\alpha,\tau,e)$$

$$\begin{cases} e = 1 = x\alpha + y\beta \\ y = 1 \\ \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \beta = 1 - x\alpha > 0 \quad \Rightarrow 1 > x\alpha \quad \Rightarrow \alpha < \frac{1}{x}$$

Donc la mesure invariante de $\mathcal{G}$ est $\frac{1}{x}dx$.

$$\begin{array}{c} \Sigma \\ (x,1,\alpha,\beta) \\ x\alpha + \beta = 1 \end{array} \xrightarrow{\tilde{F}} \begin{cases} (x, 1-x, x+\beta, \beta) \\ \dots \end{cases} \quad \Big\downarrow \varphi_t \quad \xrightarrow{\tilde{\mathcal{G}}} \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}, 1, (1-x)(\alpha+\beta)\right) \\ \dots \end{cases}$$

Méthode expérimentale pour trouver le domaine

$$\tilde{\mathcal{G}} : \Sigma \longrightarrow \Sigma$$

$$(x,\alpha) \longmapsto \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}, \alpha x^2 - (2\alpha+1)x + (\alpha+1)\right) & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1-x}{x}, \alpha x^2 - (\alpha+1)x + 1\right) & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Considérer l'orbite d'un point (x,α) par $\tilde{\mathcal{G}}$...

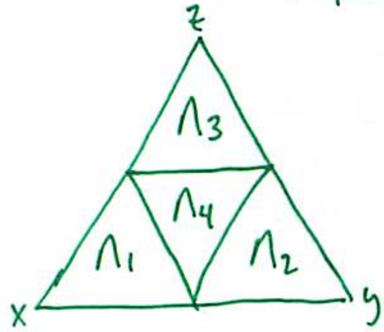
si le domaine de l'orbite n'est pas de mesure nulle alors la méthode ci-dessus marchera.

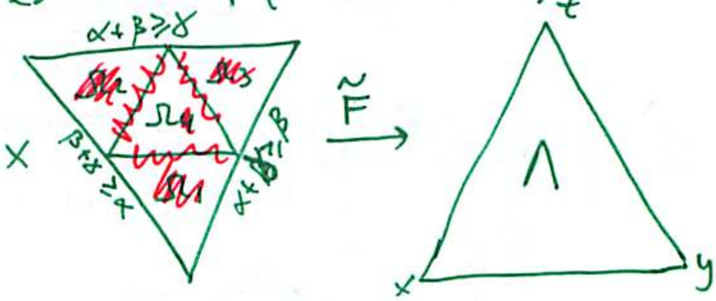
Algorithme Arnoux Rauzy Reveit

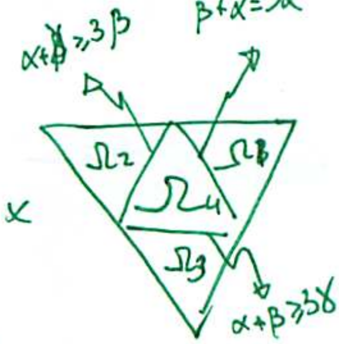
$$\text{cône} \quad \Lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x>0, y>0, z>0\}$$

Partition:

$$\Lambda_1 = \{(x,y,z) \in \Lambda \mid x > y+z\}$$
$$\Lambda_2 = \{(x,y,z) \in \Lambda \mid y > x+z\}$$
$$\Lambda_3 = \{(x,y,z) \in \Lambda \mid z > x+y\}$$
$$\Lambda_4 = \Lambda \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3)$$







$$A_1 = \begin{pmatrix} 1&1&1\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\1&1&1\\0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\1&1&1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0&\frac12&\frac12\\ \frac12&0&\frac12\\ \frac12&\frac12&0 \end{pmatrix}$$

Matrice function:

$$M : \Lambda \to GL(3,\mathbb{Q})$$
$$\vec{x} \mapsto A_i \quad \text{ssi } x \in \Lambda_i$$

Note: $A_i \cdot \Lambda = \Lambda_i$ $\Updownarrow$ $\Lambda = A_i^{-1} \Lambda_i$

MCF Algo

$$F : \Lambda \to \Lambda$$
$$\vec{x} \mapsto [M(\vec{x})]^{-1} \vec{x}$$

On cherche la mesure invariante de

$$f : \Delta \to \Delta \qquad \text{où } \Delta = \{\vec{x} \in \Lambda \mid \|\vec{x}\|_1 = 1\}$$
$$\vec{x} \mapsto \frac{F(\vec{x})}{\|F(\vec{x})\|_1}$$

Extension naturelle

$$\tilde{F} : \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{a} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} M(\vec{x})^{-1} & 0 \\ 0 & M(\vec{x})^{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{a} \end{pmatrix}$$

Lemme • $\tilde{F}$ est une bijection de $\Lambda_i \times \Omega \to \Lambda \times \Omega_i$ pour $i = 1,2,3,4$.

• $\tilde{F} : \Lambda \times \Omega \to \Lambda \times \Omega$ est une bijection avec
$$\Omega = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha+\beta > \gamma, \alpha+\gamma > \beta, \beta+\gamma > \alpha\}$$

Description de la section

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z,\alpha,\beta,\gamma) \;\middle|\; \begin{array}{l} x\alpha + y\beta + z\gamma = 1,\ x+y+z = 1,\ x>0, y>0, z>0 \\ \alpha+\beta>\gamma,\ \alpha+\gamma>\beta,\ \beta+\gamma>\alpha \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha - \gamma \\ \beta' &= \beta - \gamma \\ \tau &= \log(x+y+z) \\ e &= x\alpha + y\beta + z\gamma \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha &= \alpha' + \gamma \\ \beta &= \beta' + \gamma \end{aligned}$$

jacobien :

$$\begin{array}{c|cccccc} & x & y & \alpha' & \beta' & \tau & e \\ \hline x & 1 & 0 & * & * & * & * \\ y & 0 & 1 & * & * & * & * \\ \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x+y+z} & \gamma \\ \gamma & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & z \end{array}$$

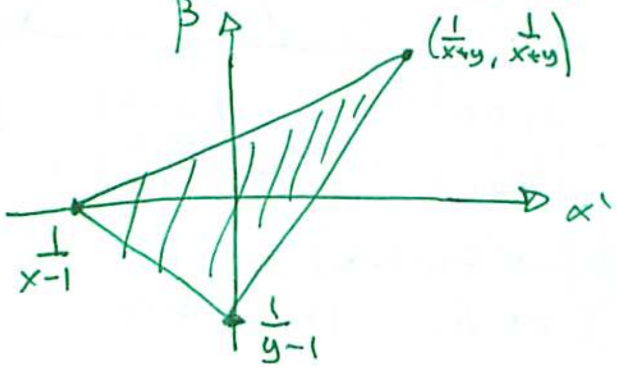
dont le det est 1

$$\Sigma' = \left\{ (x,y,\alpha',\beta',\tau,e) \;\middle|\; \begin{array}{l} e = 1,\ \tau = 0,\ x>0, y>0,\ 1-x-y>0, \\ \alpha'+\beta'+\gamma \geq 0,\ \beta'+\gamma>\alpha',\ \alpha'+\gamma>\beta' \\ e = \cancel{x\alpha+y\beta+z\gamma} \\ \quad = x\alpha' + y\beta' + \gamma \end{array} \right\}$$

$\cancel{(x,y,\alpha',\beta',0,1) \in \Sigma}$

$\cancel{\Longleftrightarrow}$

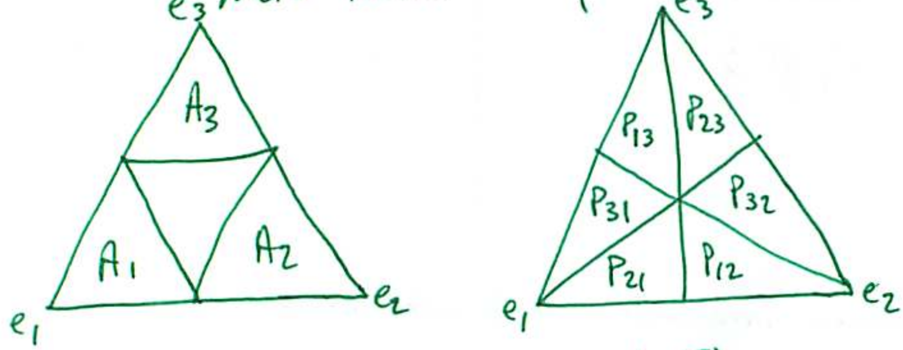
$$\Sigma' = \left\{ (x,y,\alpha',\beta',0,1) \;\middle|\; \begin{array}{l} (1-x)\alpha + (1-y)\beta > 0 \\ (1-x)\alpha + 1 > (1+y)\beta \\ (1-y)\beta + 1 > (1+x)\alpha \end{array} \right\}$$



dont l'aire est $\dfrac{1}{(x+y)(1-x)(1-y)} = \dfrac{1}{(1-z)(1-x)(1-y)}$

Algorithme de Arnoux-Rauzy-Poincaré

- $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d$ t.q. $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < x_{\sigma(3)} \dots < x_{\sigma(d)}$
- Soustraire la somme de toutes les entrées sauf une à la plus grande si c'est possible (Arnoux-Rauzy)
- Sinon soustraire $x_{\sigma(i)}$ à $x_{\sigma(i+1)}$ pour $i = 1, \dots, d-1$ (Poincaré)
- Issu de travaux avec V. Berthé pour la construction de mots infini à équilibre borné et à fréquence des lettres fixées.



$$P_{21} = \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&0 \\ 1&1&1 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \quad P_{32} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&1 \\ 1&0&1 \end{pmatrix}$$

$$P_{31} = \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&0 \\ 0&1&1 \end{pmatrix} \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&0 \\ 1&1&1 \end{pmatrix}$$

Matrix function $\quad M : \Lambda \to GL(3, \mathbb{Z})$

$$\vec{x} \mapsto \begin{cases} A_K, & \text{si } \vec{x} \in A_K \Lambda \text{ pour } K = 1, 2 \text{ ou } 3 \\ P_{jK}, & \text{sinon et si } x \in P_{jK} \Lambda \text{ pour } \{i,j,k\} = \{1,2,3\} \end{cases}$$

MCFAlgo $\quad F : \Lambda \to \Lambda$
$\vec{x} \mapsto [M(\vec{x})]^{-1} \vec{x}$

mesure inv. de $\quad f : \Delta \to \Delta$, $\vec{x} \mapsto \dfrac{F(\vec{x})}{\|F(\vec{x})\|_1}$?

Question
Peut-on trouver le domaine D de mesure > 0 t.q $\tilde{F} : D \to D$ soit une bijection?

Expérimentation (orbit de $\tilde{F}$)

$\to$ fractale

Proposition (Arnoux, Berthé, L.)
Soit $f : \Delta \to \Delta$ la version accélérée de l'algo ARP.
Soit Z un n-cylindre de f. Alors

Folklore Lemme (Distorsion bornée) $\quad \dfrac{\sup_{\vec{x} \in Z} |J_{f^n}(\vec{x})|}{\inf_{\vec{x} \in Z} |J_{f^n}(\vec{x})|} < 64.$

Corollaire f est ergodique et possède une mesure invariante abs. cont. p/r à Lebesgue.

avec V. Delecroix

Exposants de Lyapunov (100 expériences de 10^{ce} itérations chacune)

Algorithme	θ_1	θ_2	$1-\frac{\theta_2}{\theta_1}$
(pas positive) Brun (multi? nearest)	0,858	−0,334	1,389 ± 0,005
ARP (multi)	0,824	−0,320	1,389 ± 0,004
Selmer (multi)	0,183	−0,071	1,387 ± 0,03
Jacobi-Perron	1,200	−0,~~[illegible]~~448	1,374 ± 0,005
Brun (multi)	0,669	−0,247	1,368 ± 0,005
AR-Revert	0,403	−0,103	1,255

TODO

- ☐ ~~Calculer~~ Vérifier la mesure invariante par branche inverse formule
- ☐ Finir articles expérimentaux + théorique
- ☐ Nettoyer ↑
- ☐ Intégrer la densité de AR Revert
- ☐ Calculer son entropie