

# Structure des pavages, droites discrètes 3D et combinatoire des mots

Sébastien Labbé

Laboratoire d'Informatique Algorithmique : Fondements et Applications  
Université Paris Diderot Paris 7

&

Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique  
Université du Québec à Montréal

LaCIM

Université du Québec à Montréal

4 mai 2012

Sous la direction de Srečko Brlek et Valérie Berthé

```
\begin{tikzpicture}  
\draw[draw=red, fill=red]  
(0,0) -- (1,0) -- (1,1) -- (0,1) -- cycle;  
\end{tikzpicture}
```

```
\begin{tikzpicture}  
\draw[draw=red, fill=red]  
(0,0) -- (1,0) -- (1,1) -- (0,1) -- cycle;  
\end{tikzpicture}
```

AESS-UQAM en grève depuis 80 jours :



*[...] Durant leurs études, les intérêts mensuels à verser sur ces prêts sont assumés par le gouvernement. Les données du ministère de l'Éducation indiquent que de 1989 à 2008, 1,4 milliard de dollars ont ainsi été versés en intérêts seulement aux institutions financières par le gouvernement du Québec. [...]*

E. Grandbois, M. St-Onge, M. Lefrançois, *Contre la hausse - À qui profite la hausse ? Aux institutions financières*, Le Devoir, 27 mars 2012.

*[...] Durant leurs études, les intérêts mensuels à verser sur ces prêts sont assumés par le gouvernement. Les données du ministère de l'Éducation indiquent que de 1989 à 2008, 1,4 milliard de dollars ont ainsi été versés en intérêts seulement aux institutions financières par le gouvernement du Québec. [...]*

E. Grandbois, M. St-Onge, M. Lefrançois, *Contre la hausse - À qui profite la hausse ? Aux institutions financières*, Le Devoir, 27 mars 2012.

Question

*Qui fait l'investissement ?*

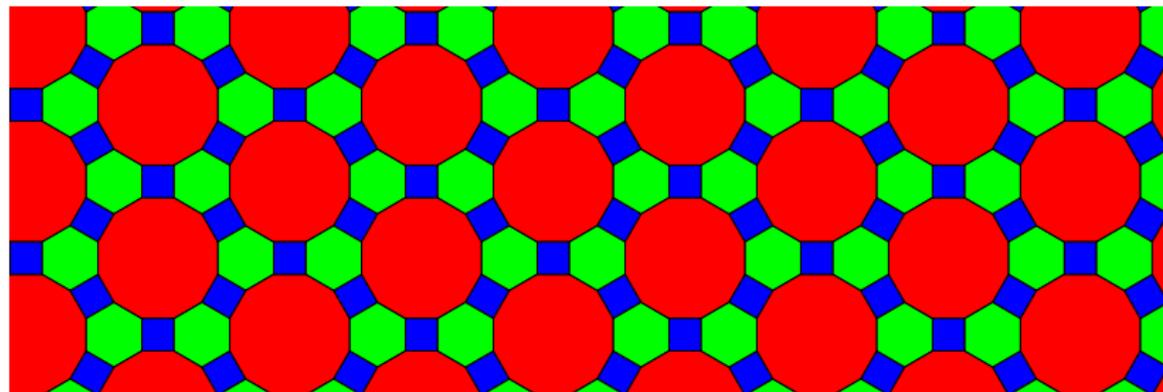
- 1 Structure des pavages par un polyomino
- 2 Complexité palindromique
- 3 Droites discrètes 3D

- 1 Structure des pavages par un polyomino
- 2 Complexité palindromique
- 3 Droites discrètes 3D

# Pavage

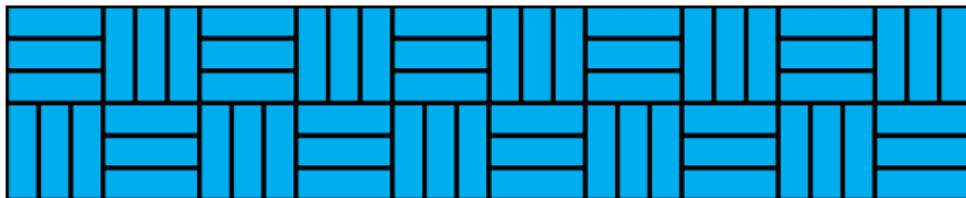
Soit un ensemble  $S = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  de polygones. Un **pavage du plan** est une **partition** du plan  $\mathbb{R}^2$  par des copies **isométriques** des polygones  $P_i$ . On dit que  $S$  **pave le plan**.

Par exemple, l'ensemble  $S = \{\text{carré}, \text{hexagone}, \text{octogone}\}$  pave le plan :

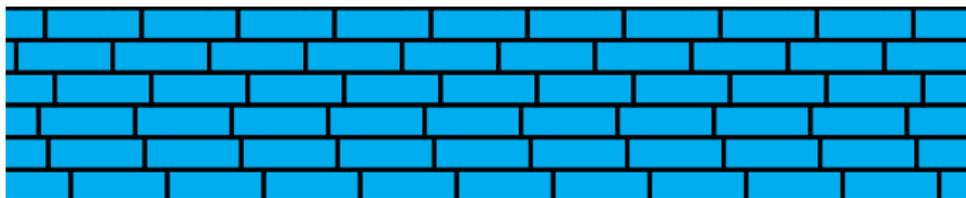


# Types de pavages

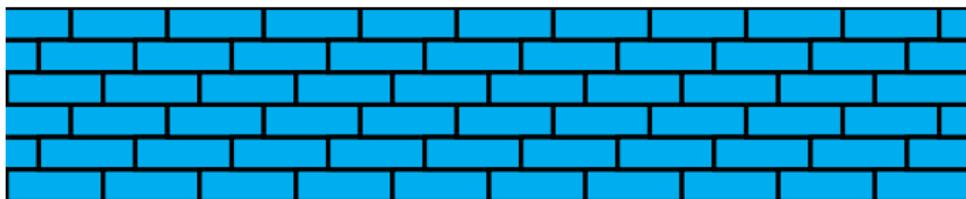
Un pavage **périodique** où les **rotations** sont permises :



Un **pavage par translation** :



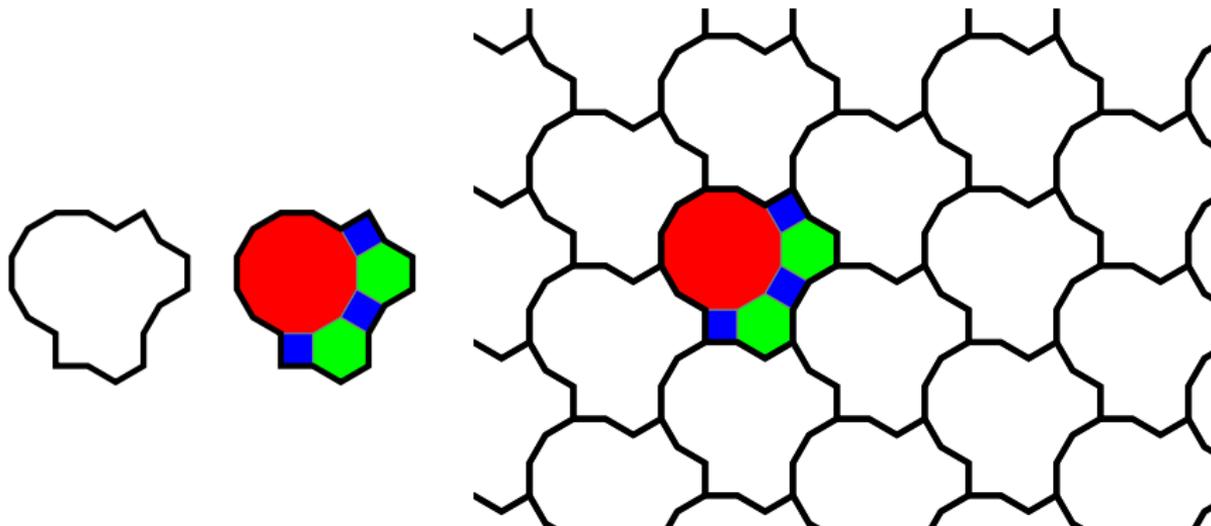
Un pavage **régulier** :



## Problème du pavage

Étant donné un ensemble  $S$  de polygones,  
*existe-t-il* un pavage du plan par  $S$  ?

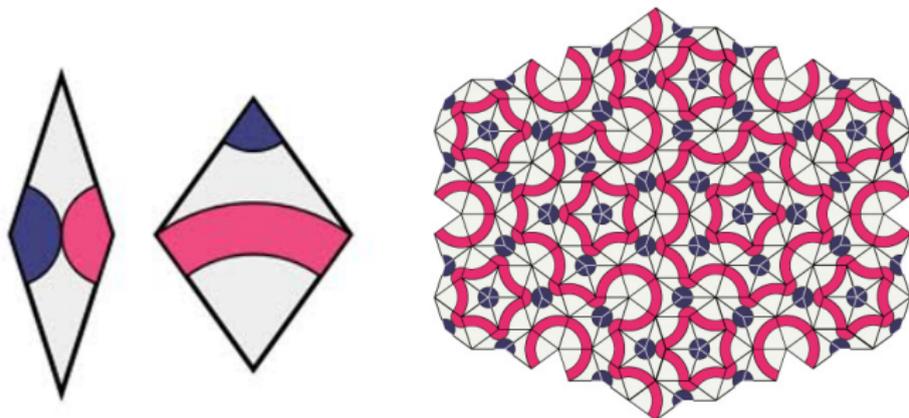
Une façon de répondre est de trouver un pavage périodique du plan.



## Theorem (Berger, 1961)

Il existe un ensemble  $S$  qui pave le plan, *mais pas de façon périodique*.

Le premier exemple construit par Berger contenait  $|S| = 20426$  tuiles.  
En 1974, Penrose a fourni un exemple contenant deux polygones :

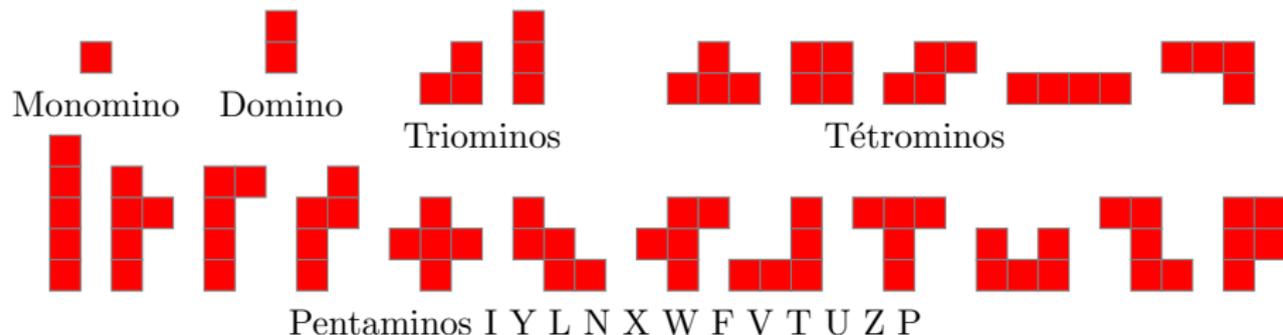


## Corollaire (Berger, 1961)

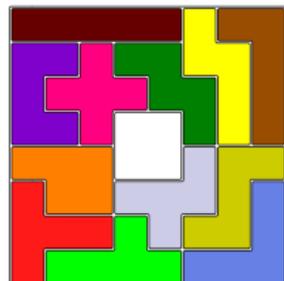
Le Problème du pavage est *indécidable*.

# Polyomino

Le mot **polyomino** (Golomb, 1952) provient de **domino**. Alors qu'un domino est fait de deux carrés, un polyomino est fait de plusieurs.

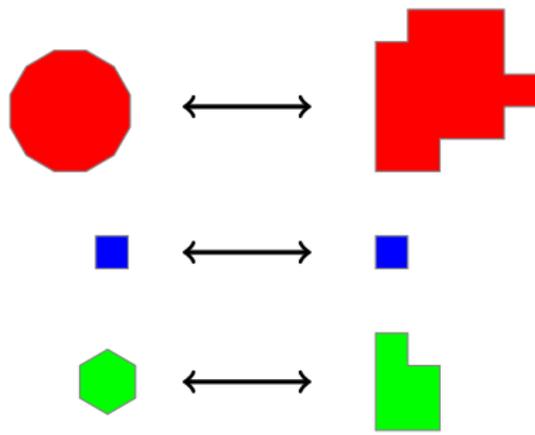


Donald Knuth (Dancing links, 2000) s'est intéressé au pavage d'un espace par des polyominos ou de façon plus générale au **problème de couverture exacte**. Cette méthode permet aussi de résoudre un sudoku.



# Pavage par polyominos est indécidable

En associant un ensemble de polyominos à un ensemble de polygones,



Golomb obtient le résultat suivant :

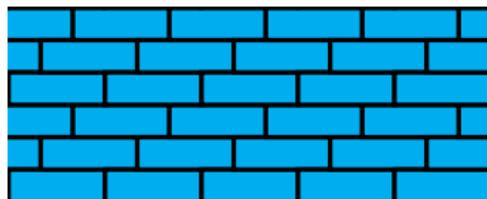
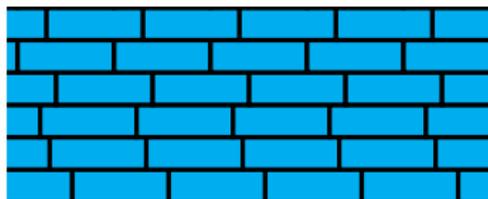
## Theorem (Golomb, 1970)

*Le Problème du pavage par un ensemble de **polyominos** est aussi **indécidable**.*

# Pavage par translation d'un polyomino est décidable

Theorem (Wijshoff et van Leuven, 1984)

Si *un polyomino* pave le plan *par translation*, alors il peut également le faire *de manière régulière*.

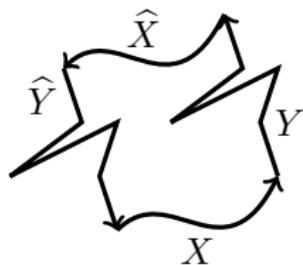


Donc, le problème du pavage où l'ensemble  $S$  contient *un seul polyomino* est *décidable*.

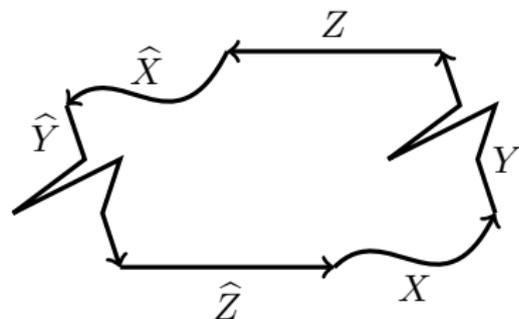
Critère de Conway, 1980 : une condition suffisante pour qu'un polygone pave le plan.

## Theorem (Beauquier, Nivat, 1991)

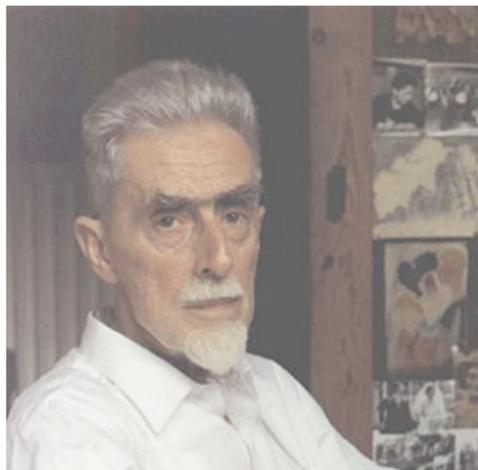
Un polyomino *pave le plan par translation* si et seulement si son contour se factorise en  $XY\hat{X}\hat{Y}$  ou  $XYZ\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ .



tuile carrée

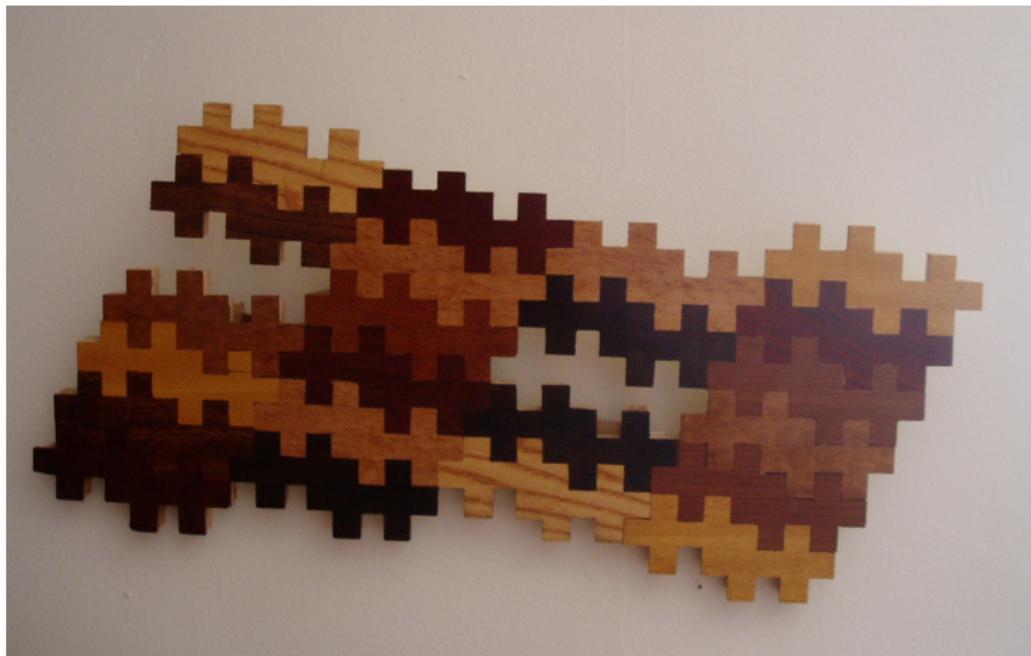


tuile hexagonale



Maurits Cornelis Escher (1898-1972). Pavage hexagonal. Pavage carré.

Oeuvre récente de l'artiste Marc Dumont.



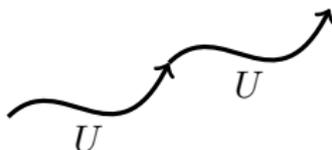


# Complexité de l'algorithme

Theorem (Brlek, Fédou, Provençal, 2009)

Déterminer si un polyomino  $P$  est une tuile carrée est décidable en temps linéaire (en la taille du périmètre).

Un motif répété  $UU$  est la concaténation de deux chemins identiques :

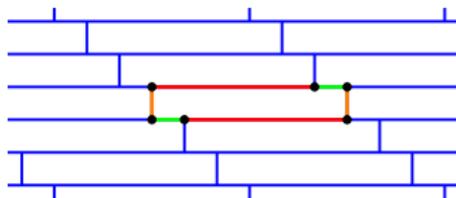
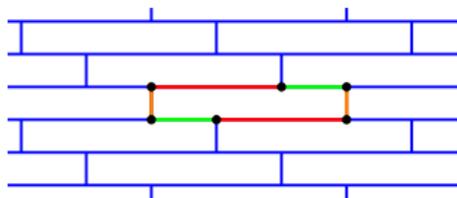
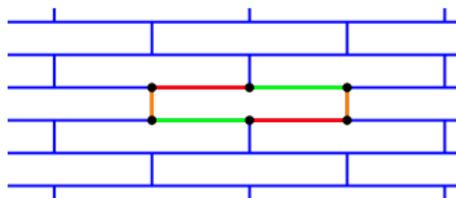
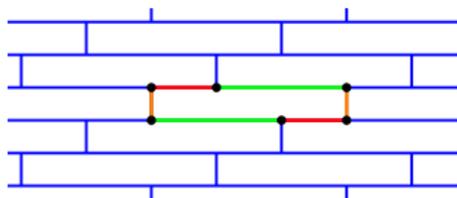
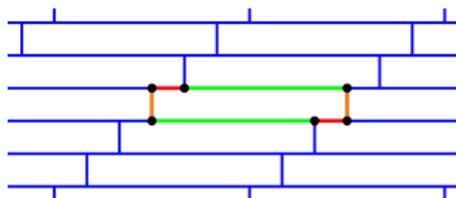
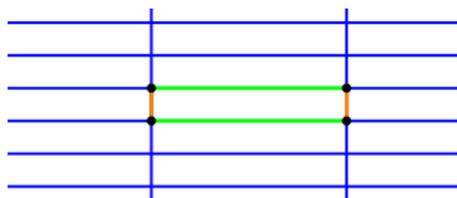


Theorem (Brlek, Fédou, Provençal, 2009)

Soit  $P$  un polyomino dont la taille du plus grand motif répété  $UU$  est bornée par la racine carrée du périmètre. Déterminer si  $P$  est une tuile hexagonale est décidable en temps linéaire (en la taille du périmètre).

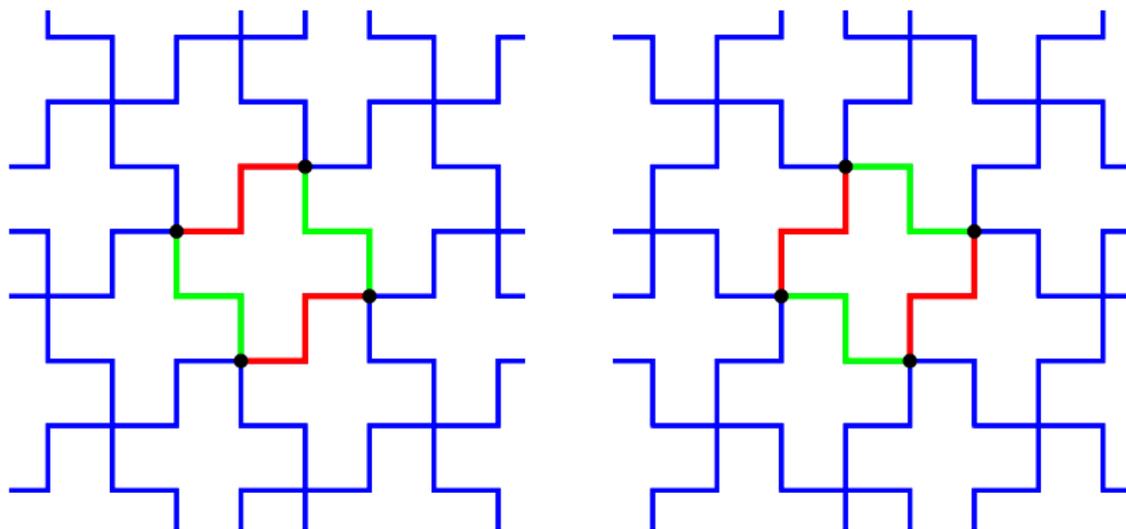
# Nombre de pavages réguliers d'une tuile hexagone

Un rectangle  $1 \times 6$  pave le plan  $\mathbb{Z}^2$  comme un hexagone en 5 façons et comme un carré en une seule façon.



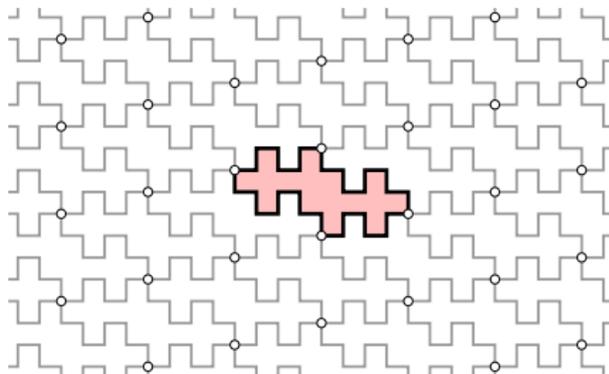
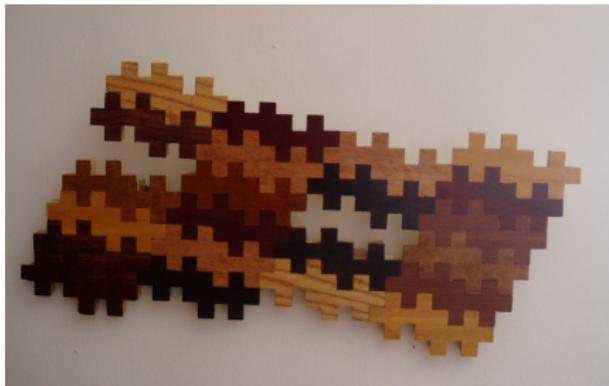
# Nombre de pavages réguliers d'une tuile carrée

Le pentamino X pave le plan  $\mathbb{Z}^2$  comme un carré de deux façons :



# Nombre de pavages réguliers d'une tuile carrée

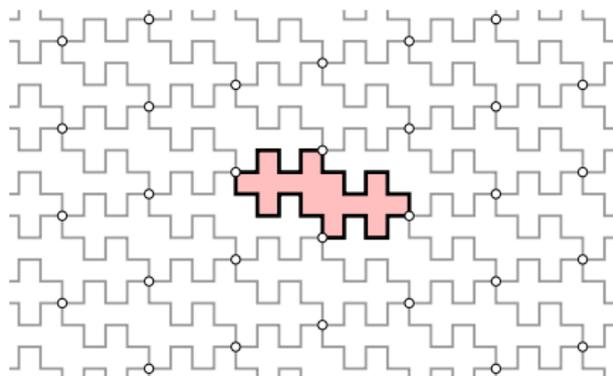
La tuile de Dumont possède un **deuxième** pavage carré.



Pourrait-il en contenir **d'autres** ?

# Nombre de pavages réguliers d'une tuile carrée

La tuile de Dumont possède un **deuxième** pavage carré.



Pourrait-il en contenir **d'autres** ?

Theorem (Blondin Massé, Brlek, L., 2011)

*Un polyomino possède **au plus deux** factorisations carrées.*

(Ceci avait été conjecturé par Brlek, Dulucq, Fédou, Provençal en 2007.)



ELSEVIER

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

## Discrete Applied Mathematics

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/dam](http://www.elsevier.com/locate/dam)

## A parallelogram tile fills the plane by translation in at most two distinct ways<sup>☆</sup>

A. Blondin Massé<sup>a,b</sup>, S. Brlek<sup>a</sup>, S. Labbé<sup>a,c,\*</sup>

<sup>a</sup>Laboratoire LaCIM, Un. du Québec à Montréal, C.P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal (QC), Canada H3C 3P8

<sup>b</sup>Laboratoire de mathématiques, Un. de Savoie, Bâtiment Chablais, Campus Scientifique, 73376 Le Bourget-du-Lac Cedex, France

<sup>c</sup>Laboratoire d'Informatique Algorithmique: Fondements et Applications CNRS UMR 7089, Un. Paris Diderot - Paris 7, Case 7014 75205 Paris Cedex 13, France

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 19 May 2011

Received in revised form 14 December 2011

Accepted 24 December 2011

Available online xxxx

#### Keywords:

Tilings

Polyominoes

### ABSTRACT

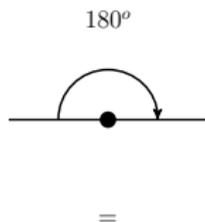
We consider the tilings by translation of a single polyomino or tile on the square grid  $\mathbb{Z}^2$ . It is well-known that there are two regular tilings of the plane, namely, parallelogram and hexagonal tilings. Although there exist tiles admitting an arbitrary number of distinct hexagon tilings, it has been conjectured that no polyomino admits more than two distinct parallelogram tilings. In this paper, we prove this conjecture.

© 2011 Elsevier B.V. All rights reserved.

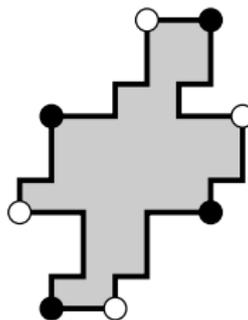
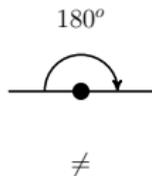
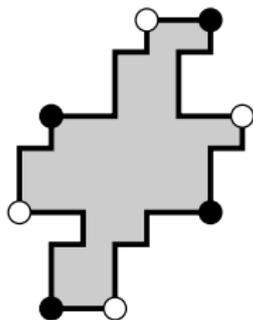
Une tuile possédant deux factorisations carrées est appelée **double carrée**.

# Invariance sous une rotation de 180 degrés

On remarque que la tuile double carrée de Dumont est **invariante** sous une rotation de 180 degrés :

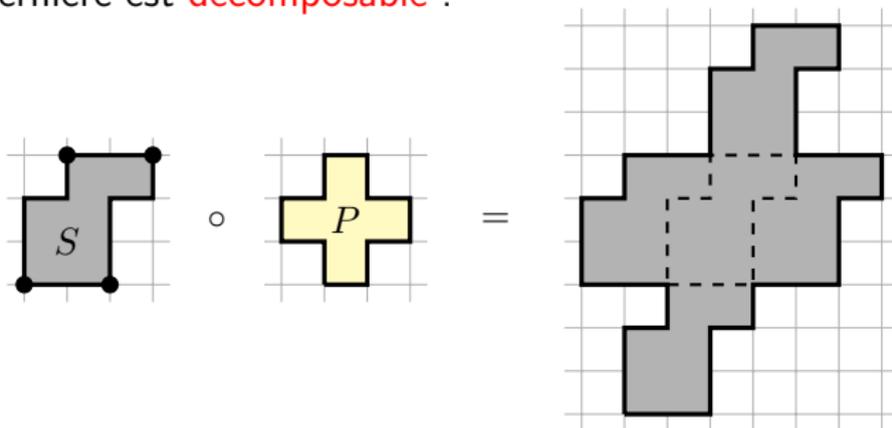


**mais pas** la tuile double carrée suivante :

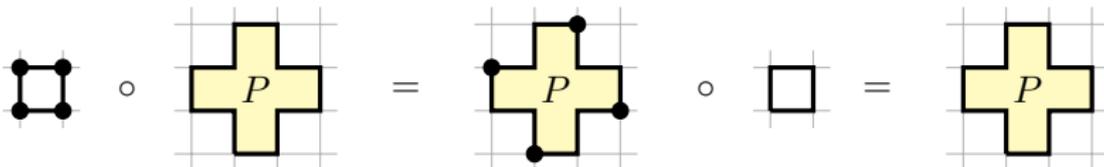


# Invariance sous une rotation de 180 degrés

Or, cette dernière est **décomposable** :

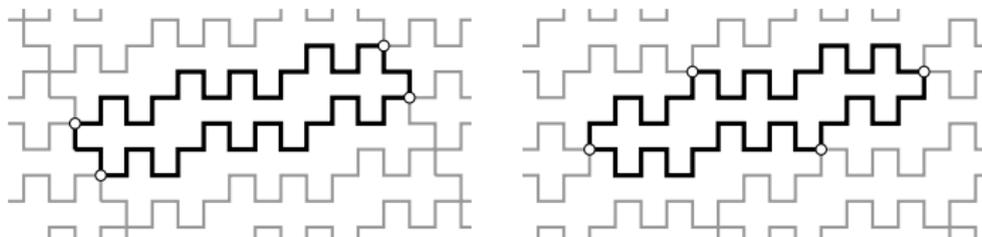


Le pentamino  $P$  est **indécomposable** :



et **invariant sous une rotation de 180 degrés.**

# Invariance sous une rotation de 180 degrés



Theorem (Blondin Massé, Garon, L., 2011)

Soit  $P$  un polyomino. Si  $P$  est une tuile *double carrée indécomposable*, alors elle est *invariante sous une rotation de 180 degrés*.

(Ceci avait été conjecturé par X. Provençal et L. Vuillon en 2008 dans le PK-4214.)

# Generation of double square tiles\*

A. BLONDIN MASSÉ†, A. GARON, S. LABBÉ

Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique,  
Université du Québec à Montréal,  
C. P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal (QC), CANADA H3C 3P8  
alexandre.blondin.masse@gmail.com, garon.ariane@gmail.com,  
slabqc@gmail.com

## Abstract

We study the problem of generating efficiently double square tiles, i.e. polyominoes yielding two distinct periodic tilings by translated copies such that every polyomino in the tiling is surrounded by exactly four copies. We show in particular that every double square tile may be obtained from the cross pentamino by applying successively some invertible operators on double squares. As a consequence, we prove a conjecture of Provençal and Vuillon [14], i.e. that these polyominoes are invariant under rotation of angle  $\pi$ .

**Keywords:** Tilings, generation, palindromes.

## 1 Introduction

The problem of designing an efficient algorithm for deciding whether a given polygon tiles the plane becomes tractable when restricted to polyominoes, that is, subsets of the square lattice  $\mathbb{Z}^2$  whose boundary is a non-crossing closed path

# Complétez la suite

Complétez la suite :

1, 2, 3, 4, ...

# Complétez la suite

Complétez la suite :

1, 2, 3, 4, ...

Réponse : 5

# Complétez la suite

Complétez la suite :

1, 2, 3, 4, ...

Réponse : 5

1, 4, 9, 16, ...

# Complétez la suite

Complétez la suite :

1, 2, 3, 4, ...

Réponse : 5

1, 4, 9, 16, ...

Réponse : 25

# Complétez la suite

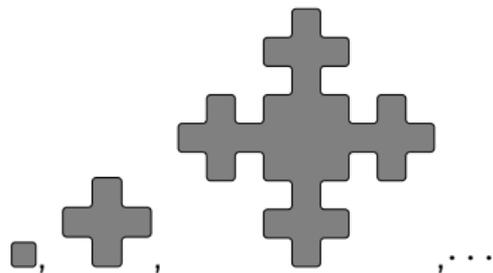
Complétez la suite :

1, 2, 3, 4, ...

Réponse : 5

1, 4, 9, 16, ...

Réponse : 25



# Complétez la suite

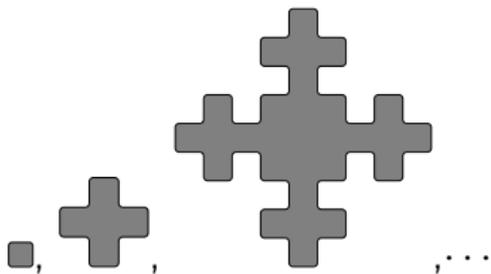
Complétez la suite :

1, 2, 3, 4, ...

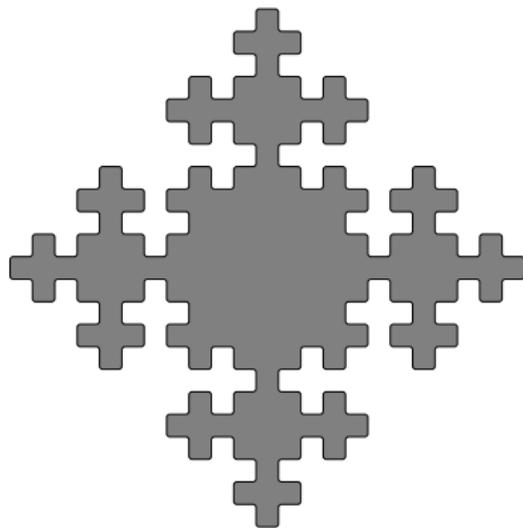
Réponse : 5

1, 4, 9, 16, ...

Réponse : 25



Réponse :





Contents lists available at ScienceDirect

## Theoretical Computer Science

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/tcs](http://www.elsevier.com/locate/tcs)



# Two infinite families of polyominoes that tile the plane by translation in two distinct ways<sup>☆</sup>

A. Blondin Massé<sup>a,b</sup>, S. Brlek<sup>a,\*</sup>, A. Garon<sup>a</sup>, S. Labbé<sup>a,c</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique (LaCIM), Université du Québec à Montréal, C.P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal, QC, H3C 3P8, Canada*

<sup>b</sup> *Laboratoire de mathématiques (LAMA), Université de Savoie, Bâtiment Chablais, Campus Scientifique, F-73376 Le Bourget-du-Lac Cedex, France*

<sup>c</sup> *Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier (LIRMM), Université Montpellier 2, 161 rue Ada, F-34095 Montpellier Cedex 5, France*

### ARTICLE INFO

**Keywords:**

Tessellation  
Polyomino  
Christoffel word  
Fibonacci sequence

### ABSTRACT

It has been proved that, among the polyominoes that tile the plane by translation, the so-called squares tile the plane in at most two distinct ways. In this paper, we focus on double squares, that is, the polyominoes that tile the plane in exactly two distinct ways. Our approach is based on solving equations on words, which allows us to exhibit properties about their shape. Moreover, we describe two infinite families of double squares. The first one is directly linked to Christoffel words and may be interpreted as segments of thick straight lines. The second one stems from the Fibonacci sequence and reveals some fractal features.

© 2010 Elsevier B.V. All rights reserved.

### 1. Introduction

## FIBONACCI SNOWFLAKES

ALEXANDRE BLONDIN MASSÉ, SREČKO BRLEK, SÉBASTIEN LABBÉ  
AND MICHEL MENDÈS FRANCE

*Dedicated to Paulo Ribenboim.*

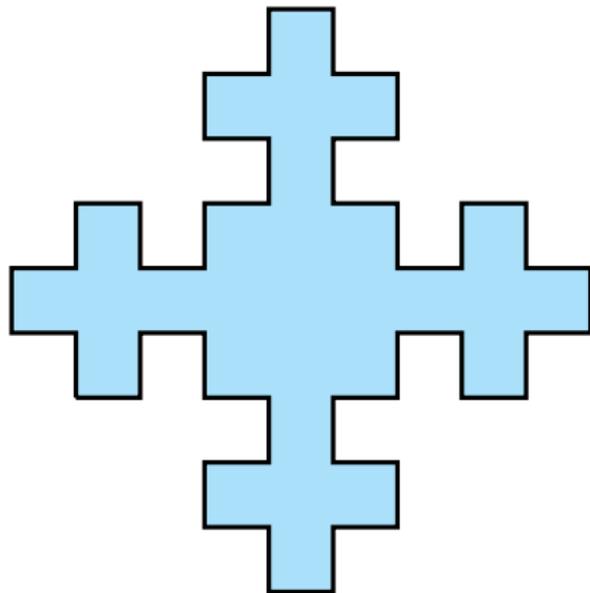
**RÉSUMÉ.** Nous étudions les mots sur l'alphabet à 2 lettres  $\mathcal{T} = \{L, R\}$  qui codent des chemins dans le plan discret  $\mathbb{Z} \times i\mathbb{Z}$ . Une récurrence permet de construire des chemins simples associés à une classe de polyominos que nous appelons *polyominos de Fibonacci* : ils possèdent une structure de type flocon de neige dont l'aire est donnée par la suite

1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461, 195025, 1136689, 6625109, 38613965, ...

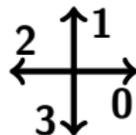
tandis que leur périmètre s'exprime en terme des nombres de Fibonacci  $F(3n+1)$ . De plus chacun de ces polyominos pave le plan par translation.

**ABSTRACT.** We study words on the 2-letter alphabet  $\mathcal{T} = \{L, R\}$  coding simple paths in the discrete plane  $\mathbb{Z} \times i\mathbb{Z}$ . A recurrence formula allows to build paths that are simple and linked with a class of polyominoes which we call *Fibonacci polyominoes*: they have a snowflake like structure whose area is given by the sequence

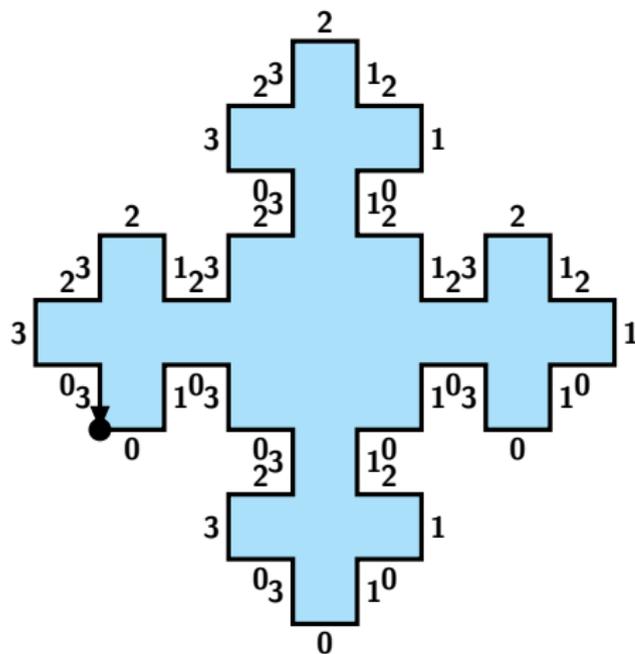
1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461, 195025, 1136689, 6625109, 38613965, ...



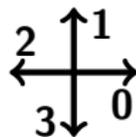
$$\Sigma = \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$



# L'outil derrière les preuves : la combinatoire des mots

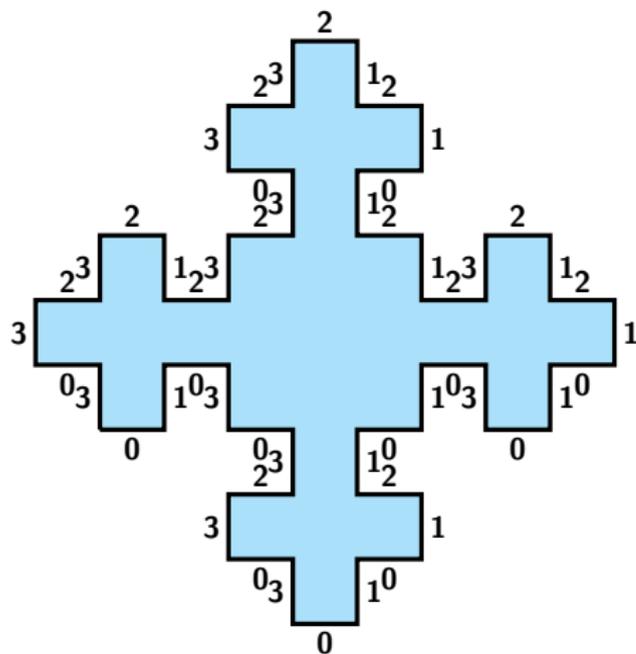


$$\Sigma = \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

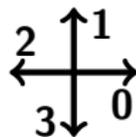


$w = 0103032303010121010301012123212101212323032321232303$

# L'outil derrière les preuves : la combinatoire des mots

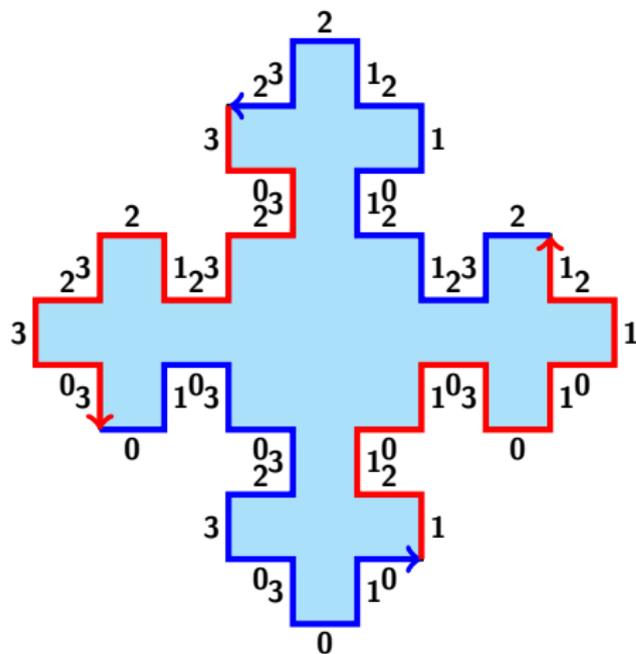


$$\Sigma = \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

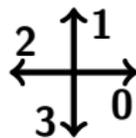


$[w] \equiv 0103032303010121010301012123212101212323032321232303$

# L'outil derrière les preuves : la combinatoire des mots

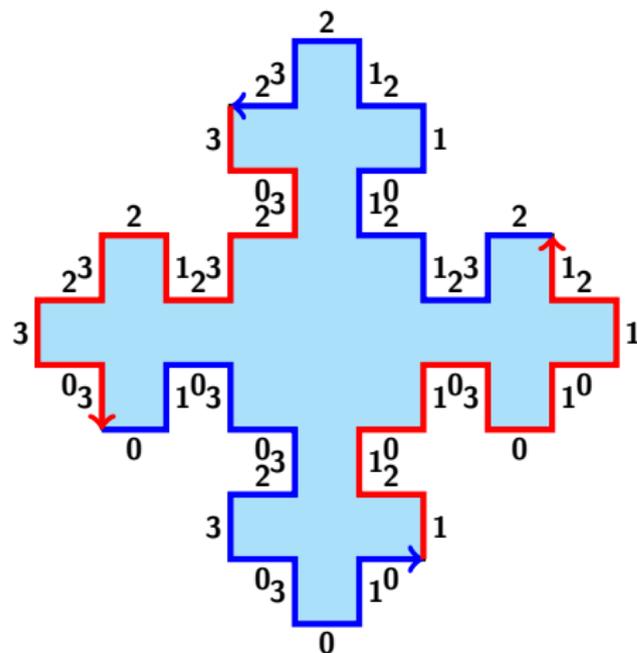


$$\Sigma = \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

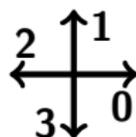


$$[w] \equiv 0103032303010121010301012123212101212323032321232303$$

# L'outil derrière les preuves : la combinatoire des mots



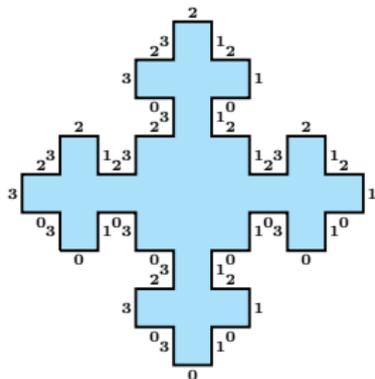
$$\Sigma = \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$



$[w] \equiv$	<b>0103032303010</b>	<b>1210103010121</b>	<b>2321210121232</b>	<b>3032321232303</b>
	$X$	$Y$	$\hat{X}$	$\hat{Y}$

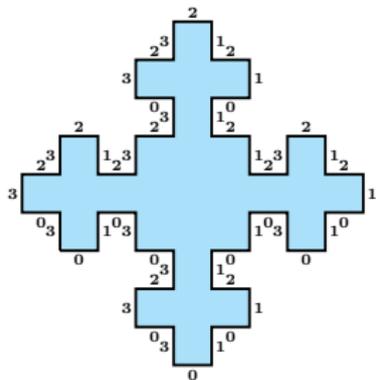
- 1 Structure des pavages par un polyomino
- 2 Complexité palindromique
- 3 Droites discrètes 3D

# Complexité en facteurs

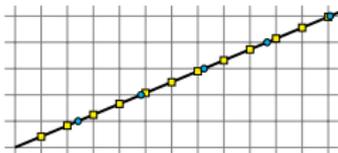


$n$	$p(n)$	$L(n)$
0	1	$\{\varepsilon\}$
1	4	$\{0, 1, 2, 3\}$
2	8	$\{01, 03, 10, 12, 21, 23, 30, 32\}$
3	16	$\{030, 212, 301, 032, 103, \dots\}$
4	24	$\{1030, 2303, 0121, 1232, \dots\}$
5	32	$\{21010, 10303, 32123, \dots\}$

# Complexité en facteurs



$n$	$p(n)$	$L(n)$
0	1	$\{\varepsilon\}$
1	4	$\{0, 1, 2, 3\}$
2	8	$\{01, 03, 10, 12, 21, 23, 30, 32\}$
3	16	$\{030, 212, 301, 032, 103, \dots\}$
4	24	$\{1030, 2303, 0121, 1232, \dots\}$
5	32	$\{21010, 10303, 32123, \dots\}$

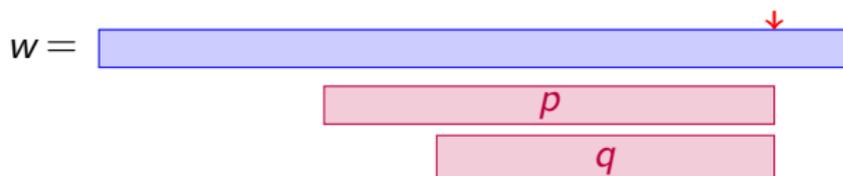


$n$	$p(n)$	$L(n)$
0	1	$\{\varepsilon\}$
1	2	$\{0, 1\}$
2	3	$\{01, 10, 00\}$
3	4	$\{001, 000, 010, 100\}$
4	5	$\{1001, 1000, 0100, 0001, 0010\}$
5	6	$\{00010, 01001, 10010, 00100, \dots\}$

$$c_{1/\sqrt{2}} = 0010010001001000100\dots$$

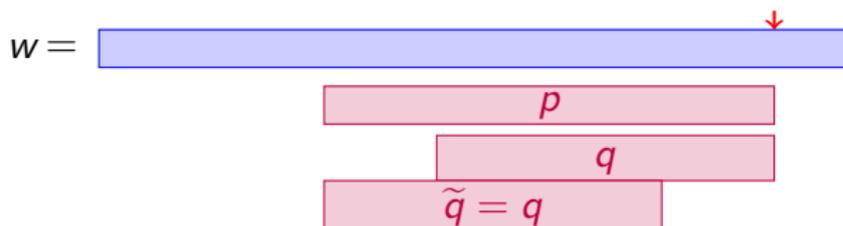


# Nombre de palindromes



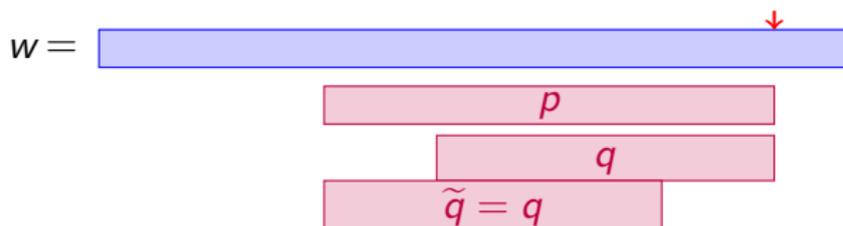
- Supposons que la **première** occurrence de deux palindromes distincts  $p$  et  $q$  **termine** à la même position.

# Nombre de palindromes



- Supposons que la **première** occurrence de deux palindromes distincts  $p$  et  $q$  **termine** à la même position.
- Alors  $q$  possède une **autre occurrence** dans  $w$  ce qui est une contradiction.

# Nombre de palindromes



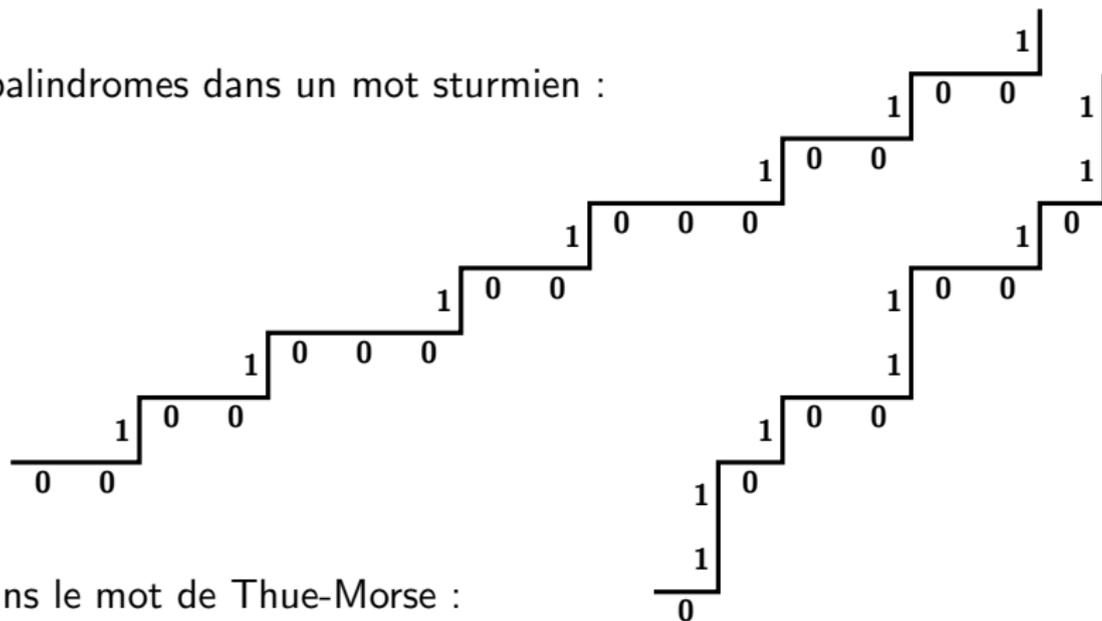
- Supposons que la **première** occurrence de deux palindromes distincts  $p$  et  $q$  **termine** à la même position.
- Alors  $q$  possède une **autre occurrence** dans  $w$  ce qui est une contradiction.

Theorem (Droubay, Justin and Pirillo, 2001)

Soit  $w$  un mot fini. Alors  $|\text{Pal}(w)| \leq |w| + 1$ .

# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :

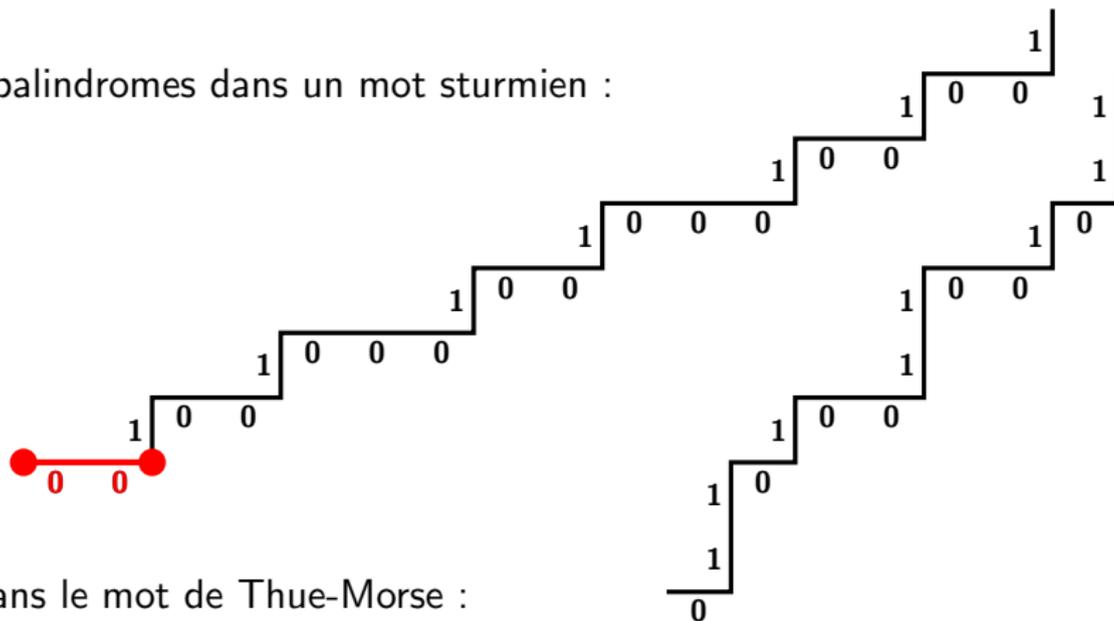


et dans le mot de Thue-Morse :



# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :

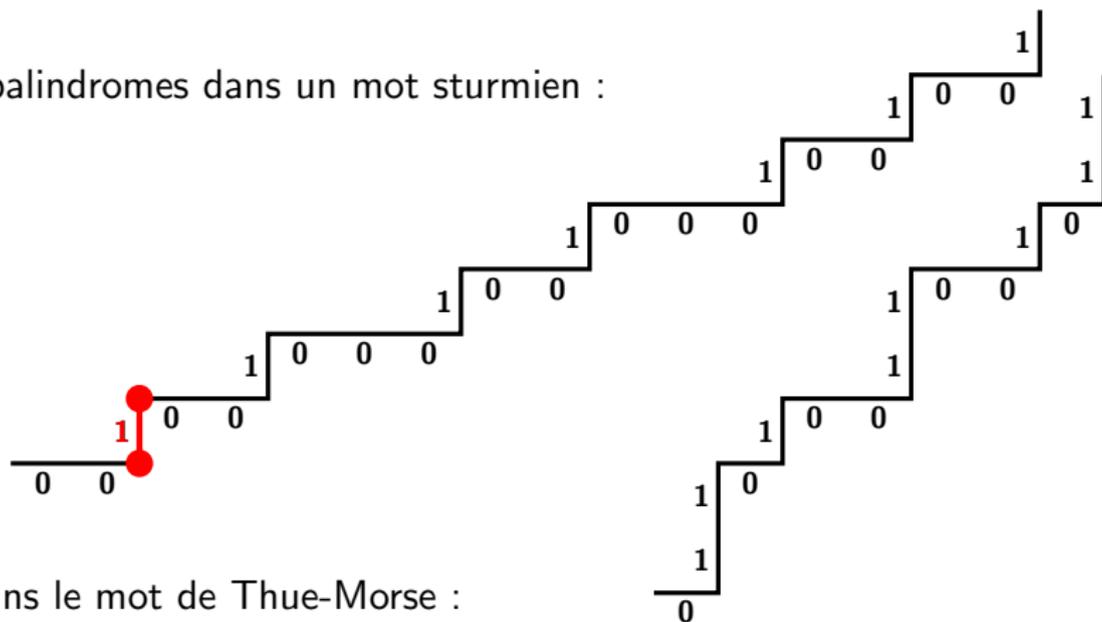


et dans le mot de Thue-Morse :



# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :

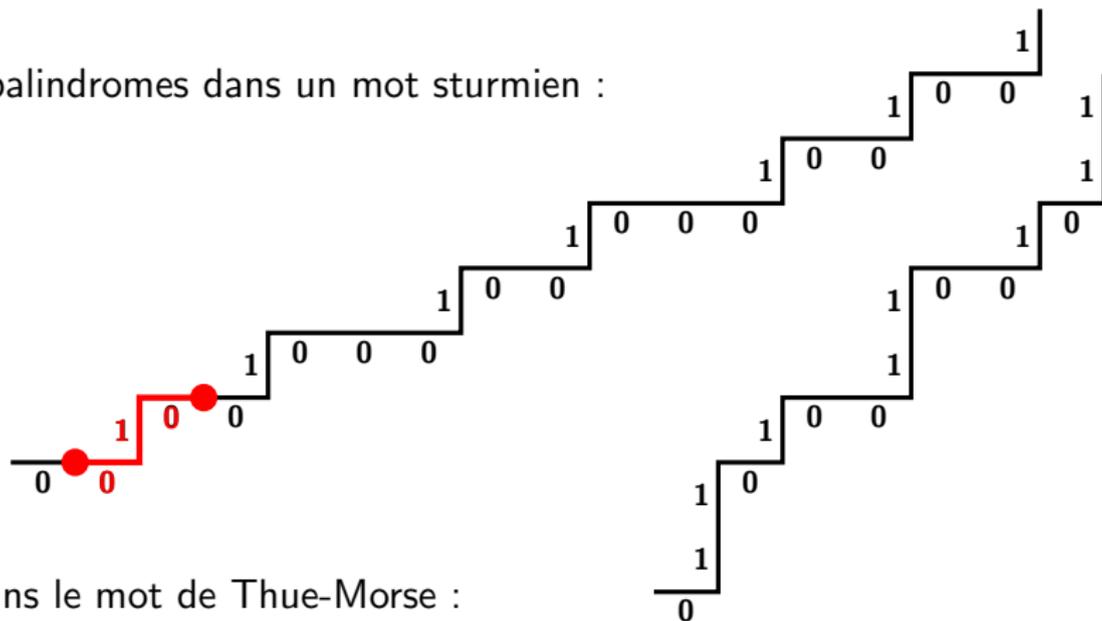


et dans le mot de Thue-Morse :

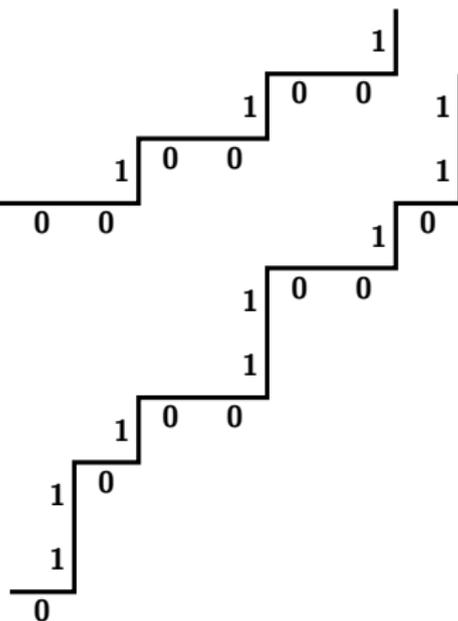


# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :



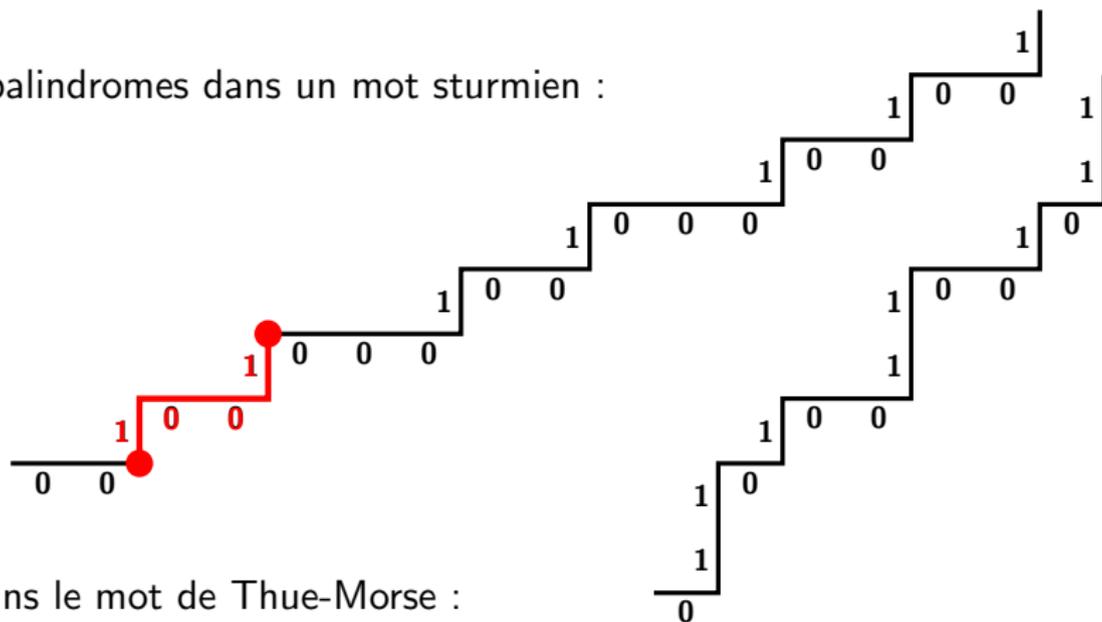
et dans le mot de Thue-Morse :





# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :

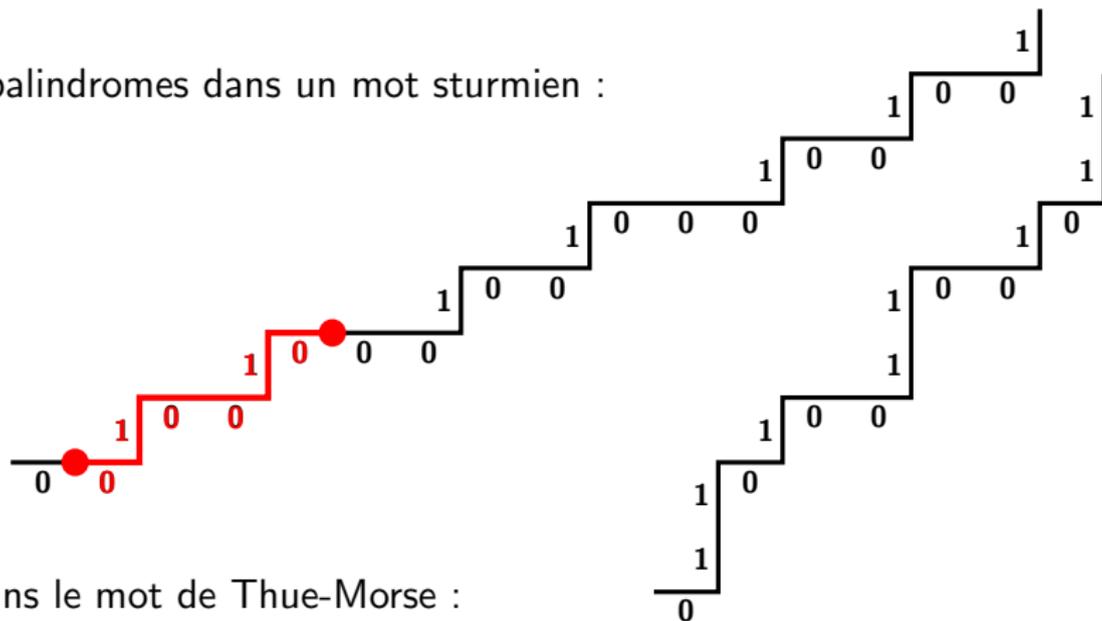


et dans le mot de Thue-Morse :

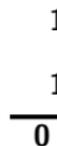


# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :



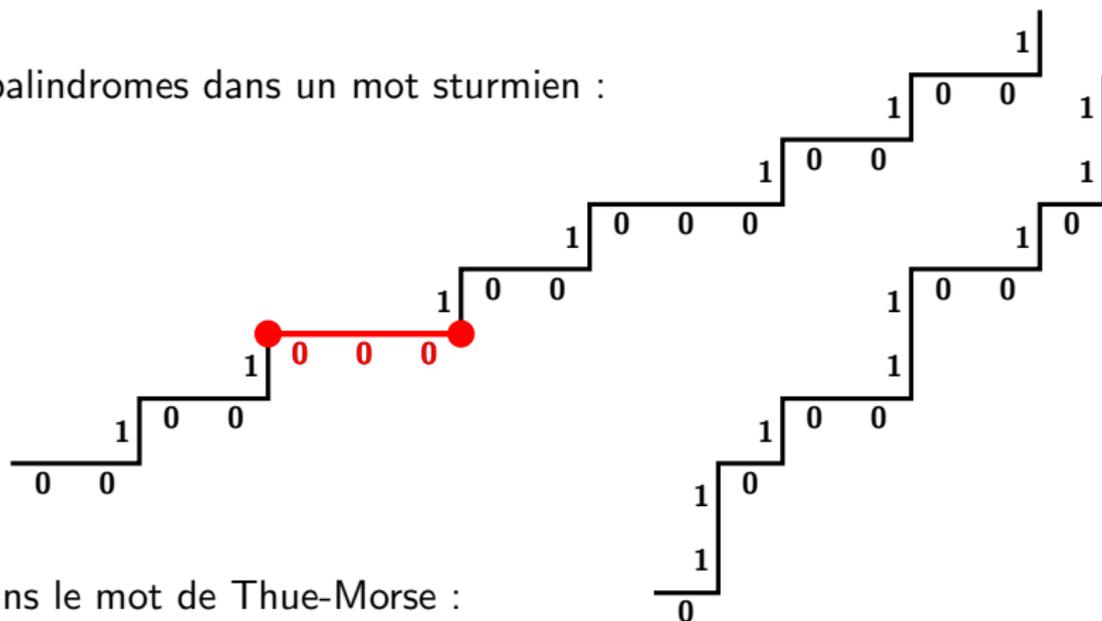
et dans le mot de Thue-Morse :





# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :

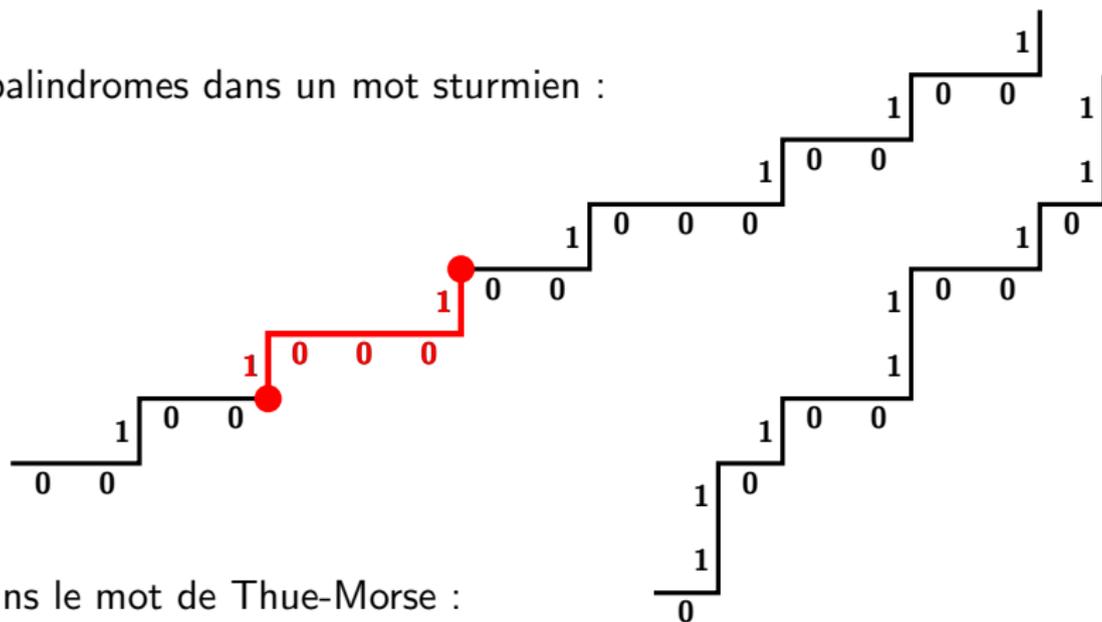


et dans le mot de Thue-Morse :



# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :



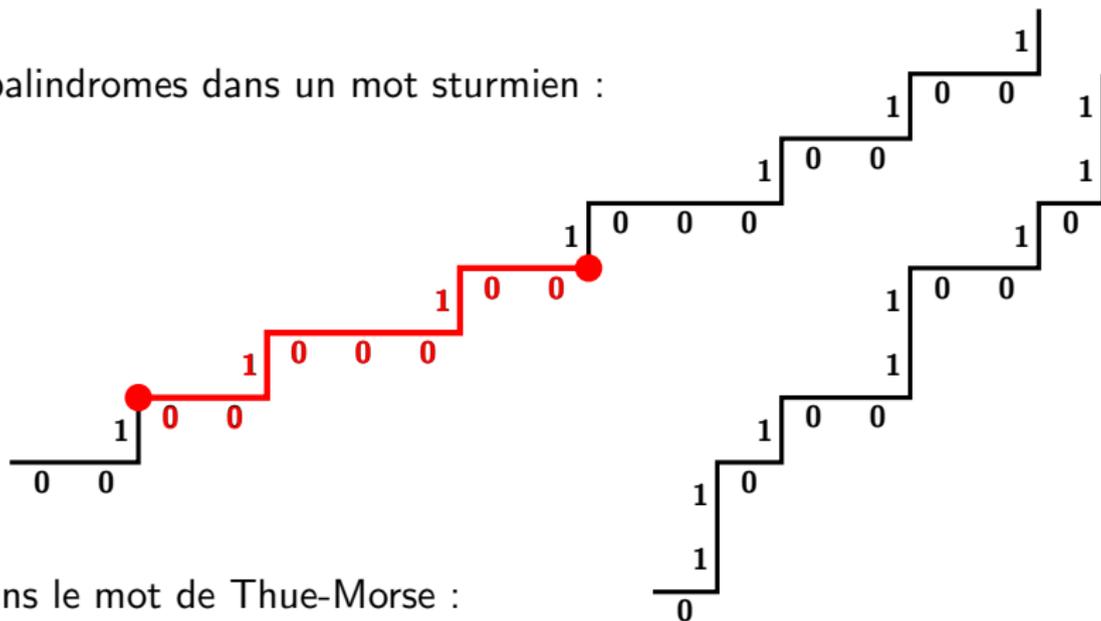
et dans le mot de Thue-Morse :





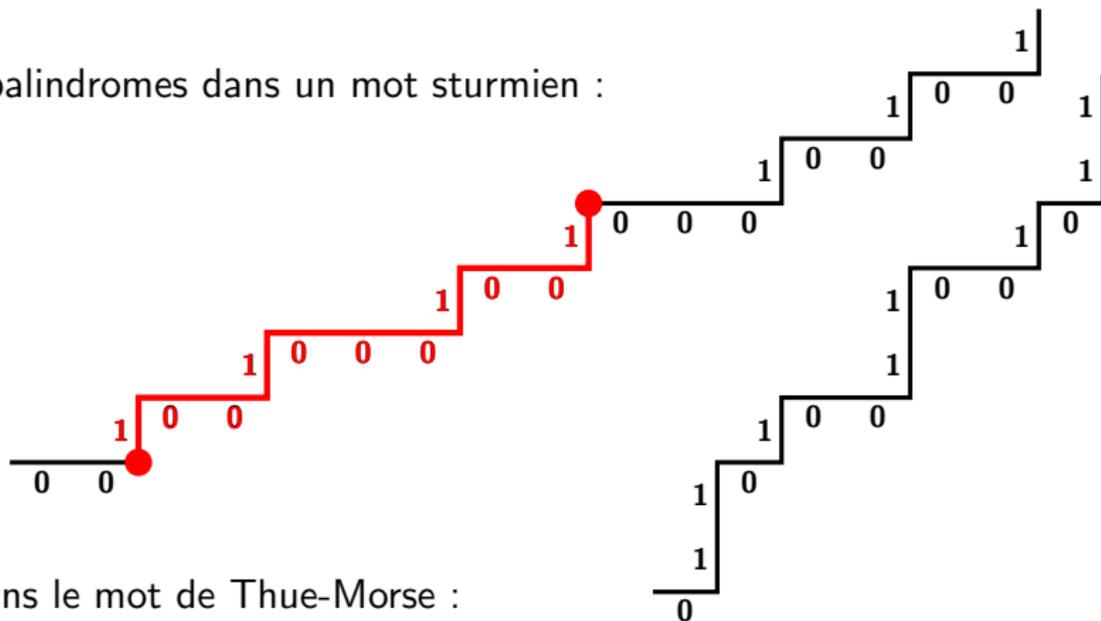
# Palindromes dans un mot Sturmien

Les palindromes dans un mot Sturmien :



# Palindromes dans un mot Sturmien

Les palindromes dans un mot Sturmien :



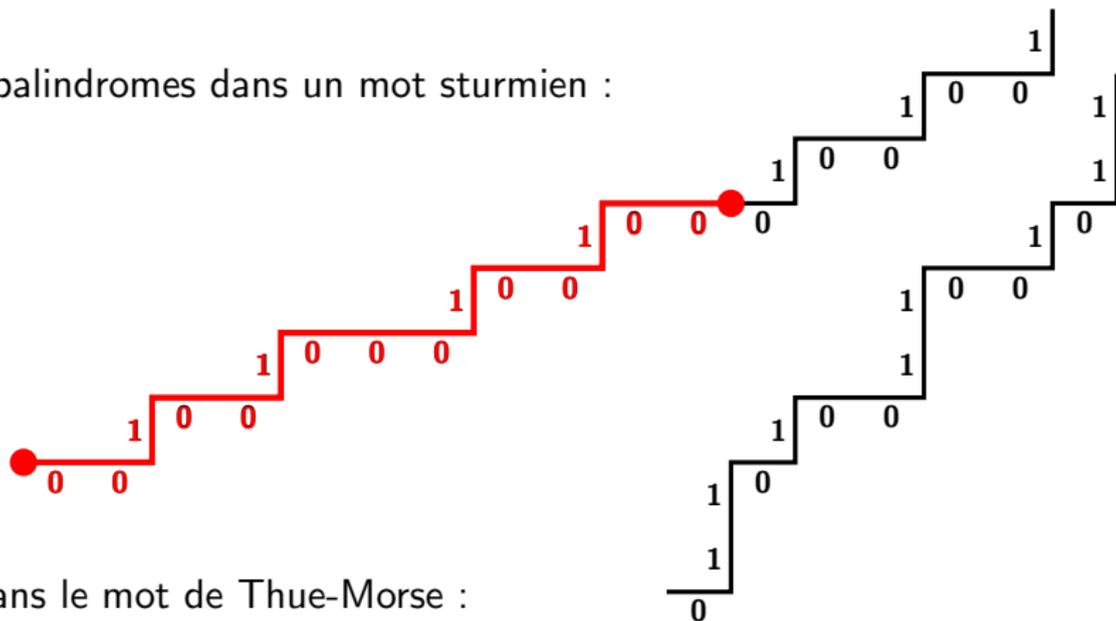
et dans le mot de Thue-Morse :



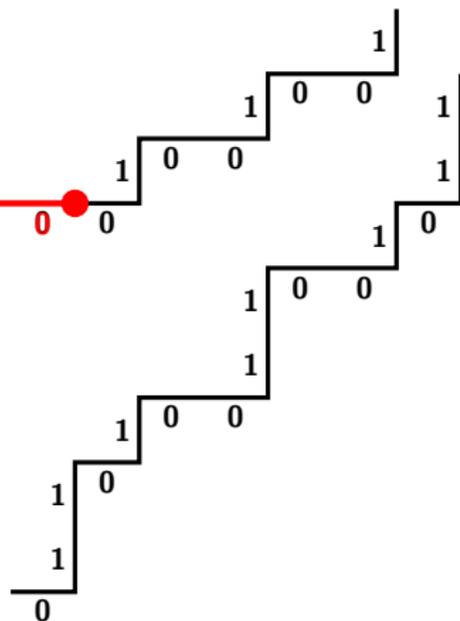


# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :

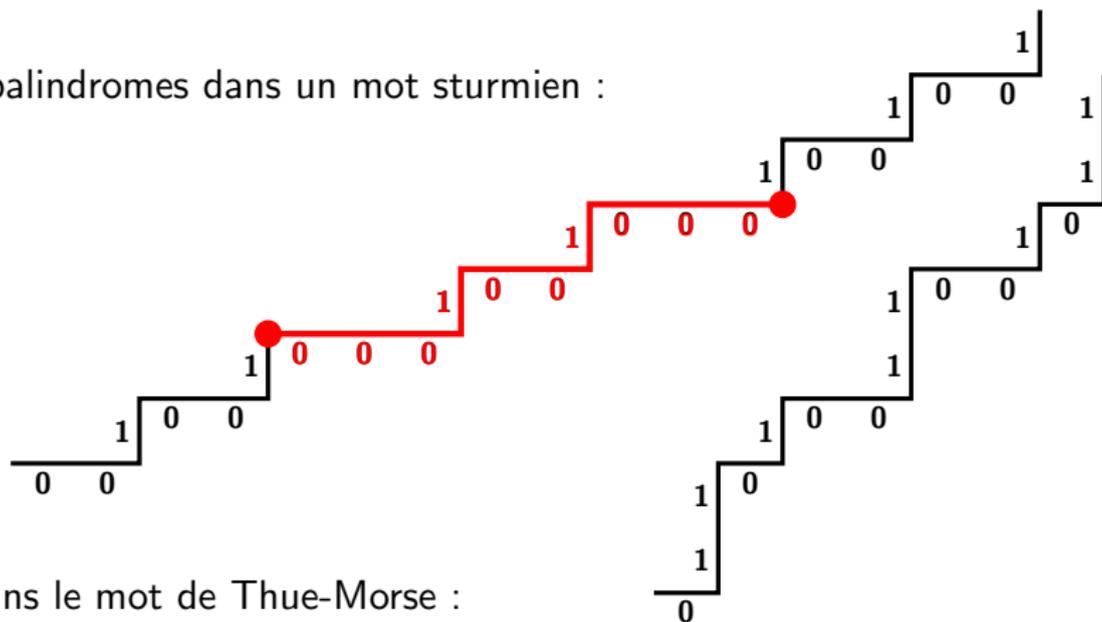


et dans le mot de Thue-Morse :

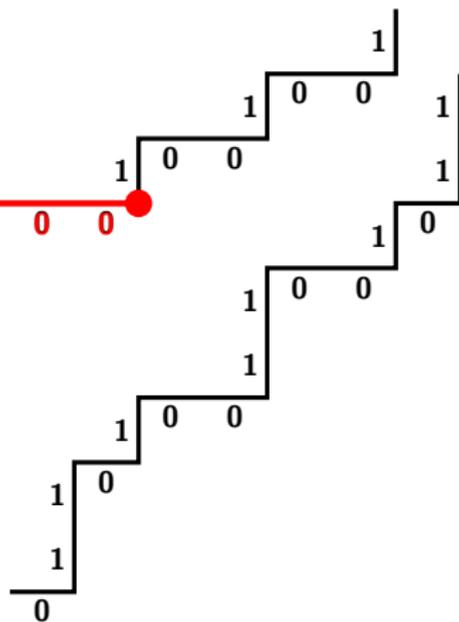


# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :

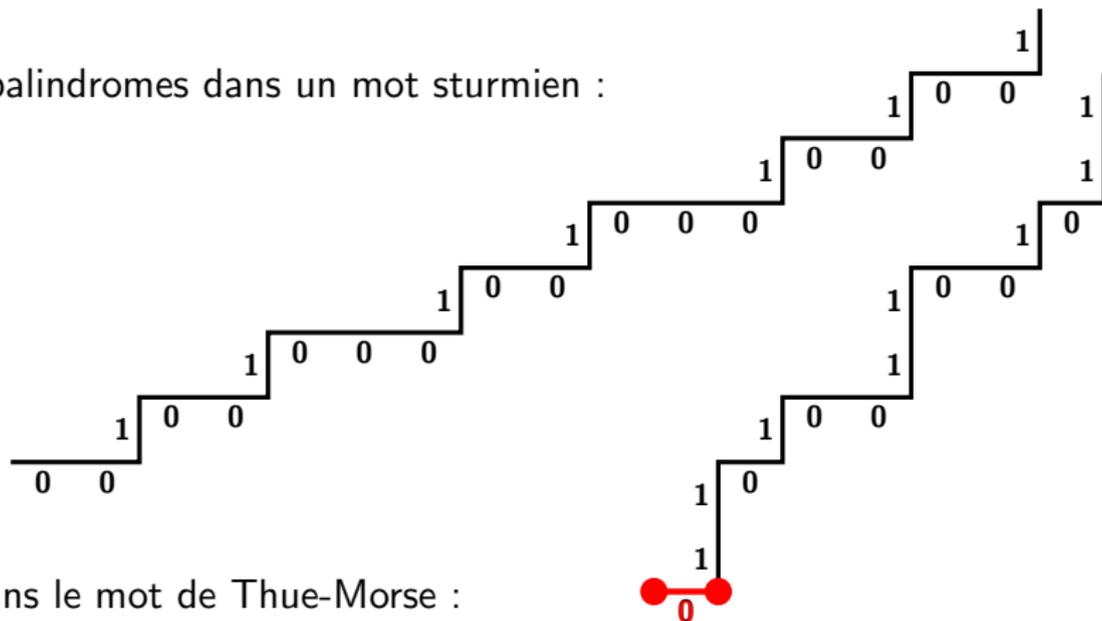


et dans le mot de Thue-Morse :



# Palindromes dans un mot Sturmien

Les palindromes dans un mot Sturmien :



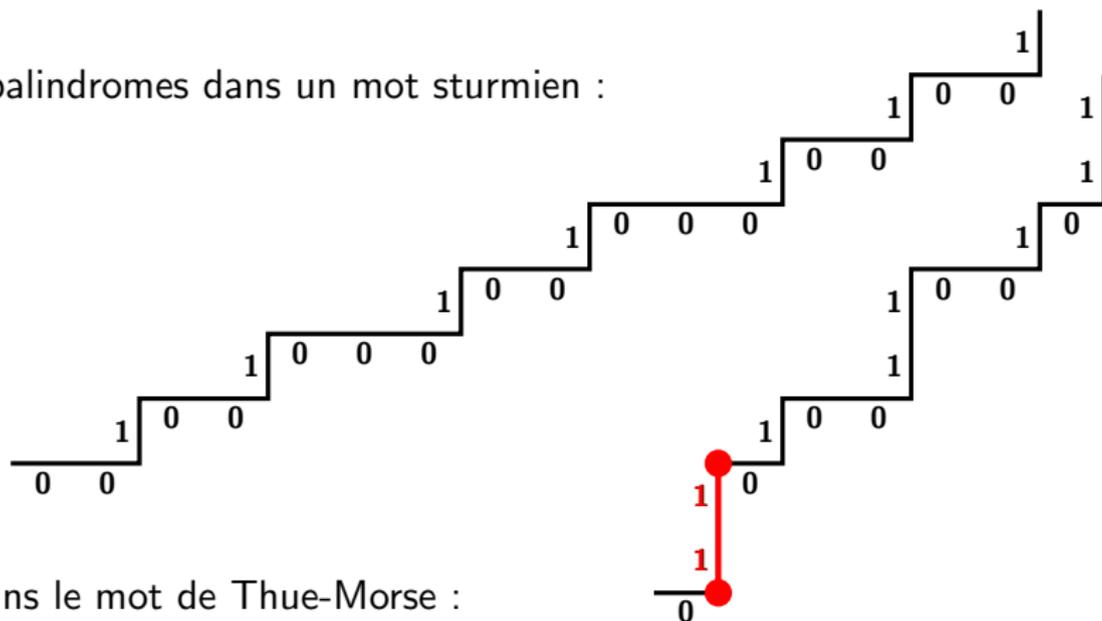
et dans le mot de Thue-Morse :





# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :

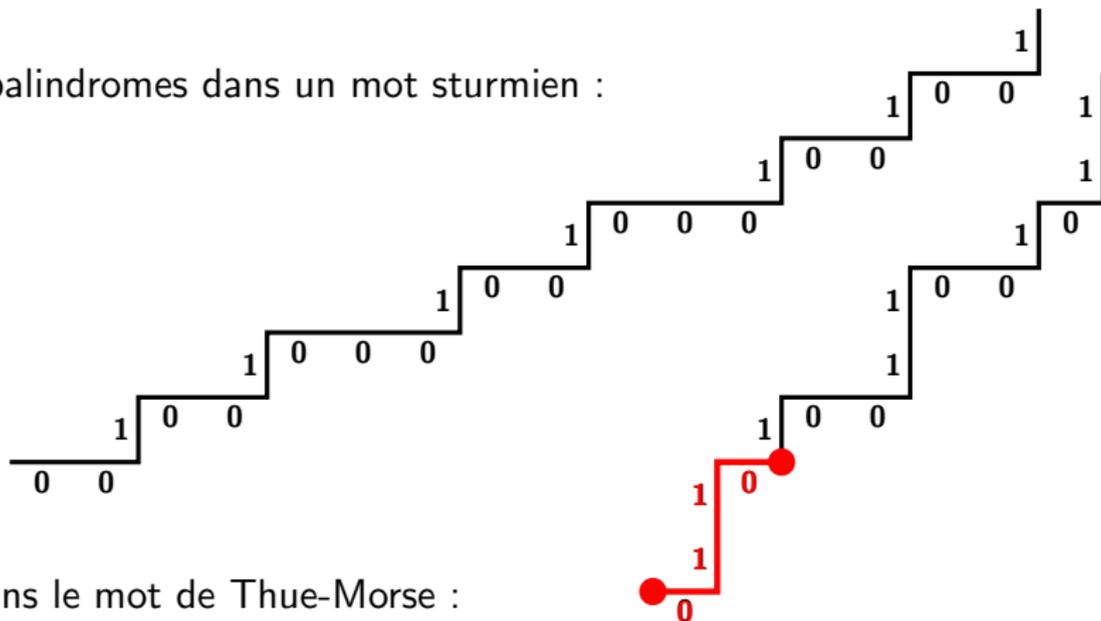


et dans le mot de Thue-Morse :



# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :

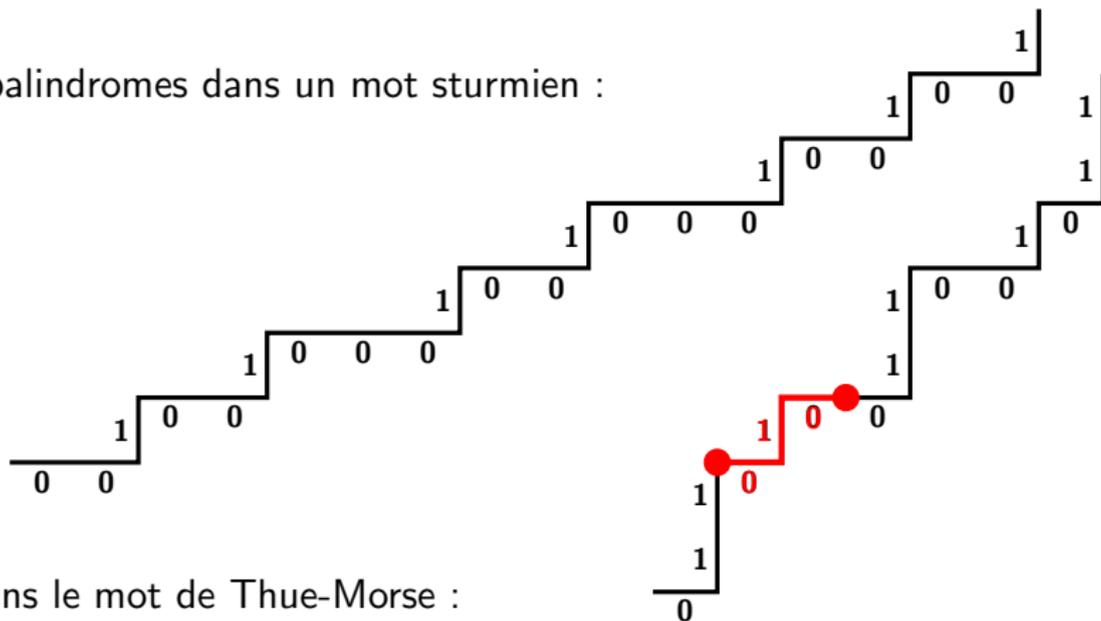


et dans le mot de Thue-Morse :

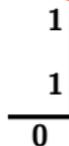


# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :

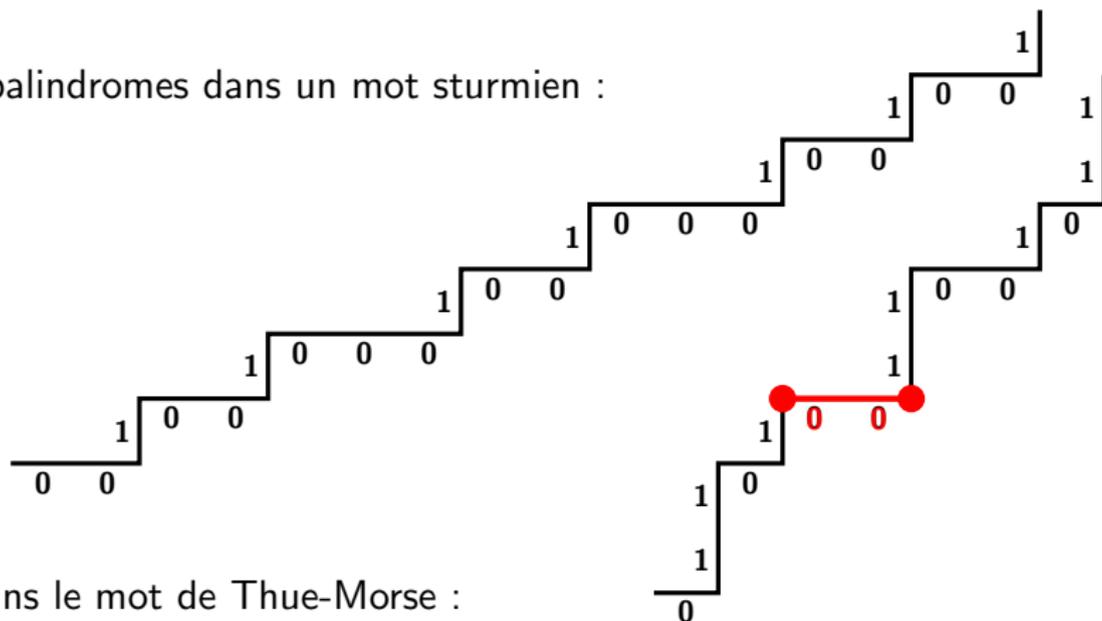


et dans le mot de Thue-Morse :



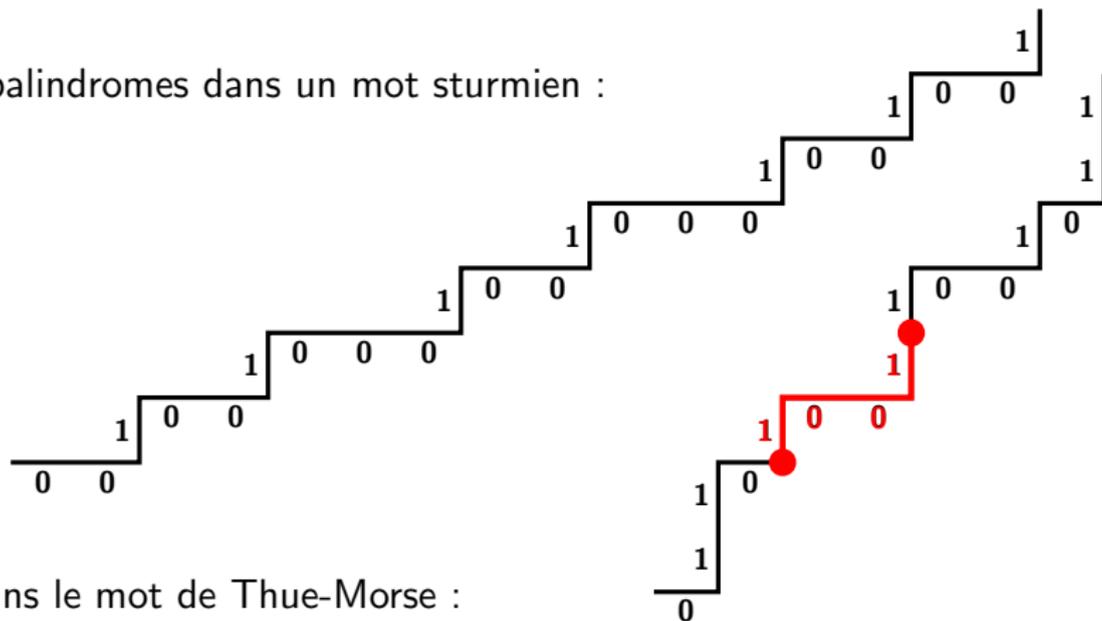
# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :



# Palindromes dans un mot sturmien

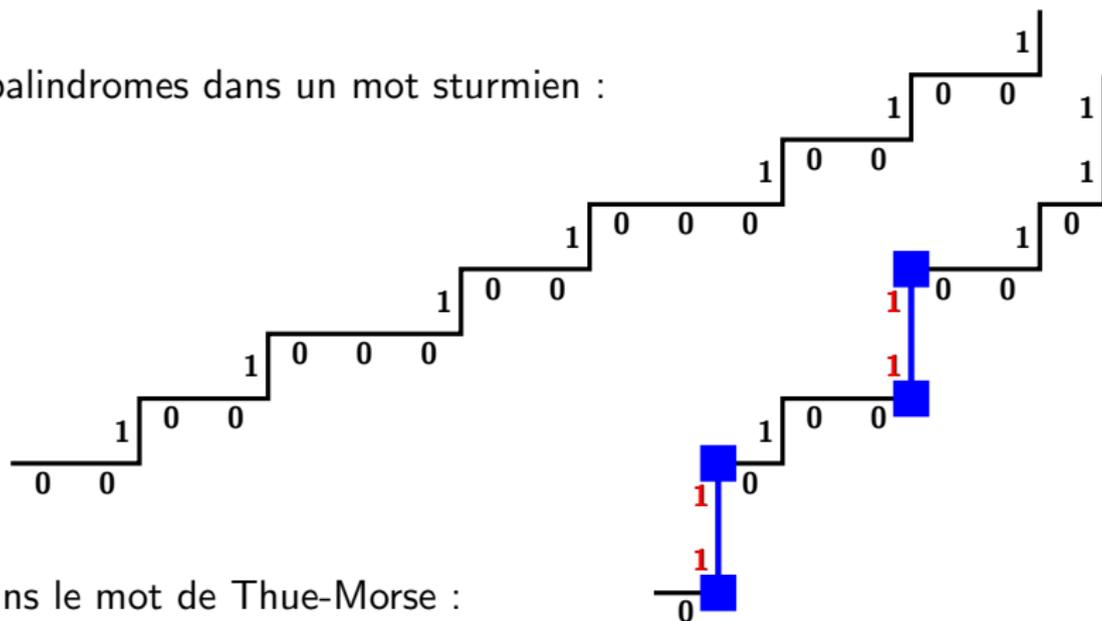
Les palindromes dans un mot sturmien :



et dans le mot de Thue-Morse :

# Palindromes dans un mot sturmien

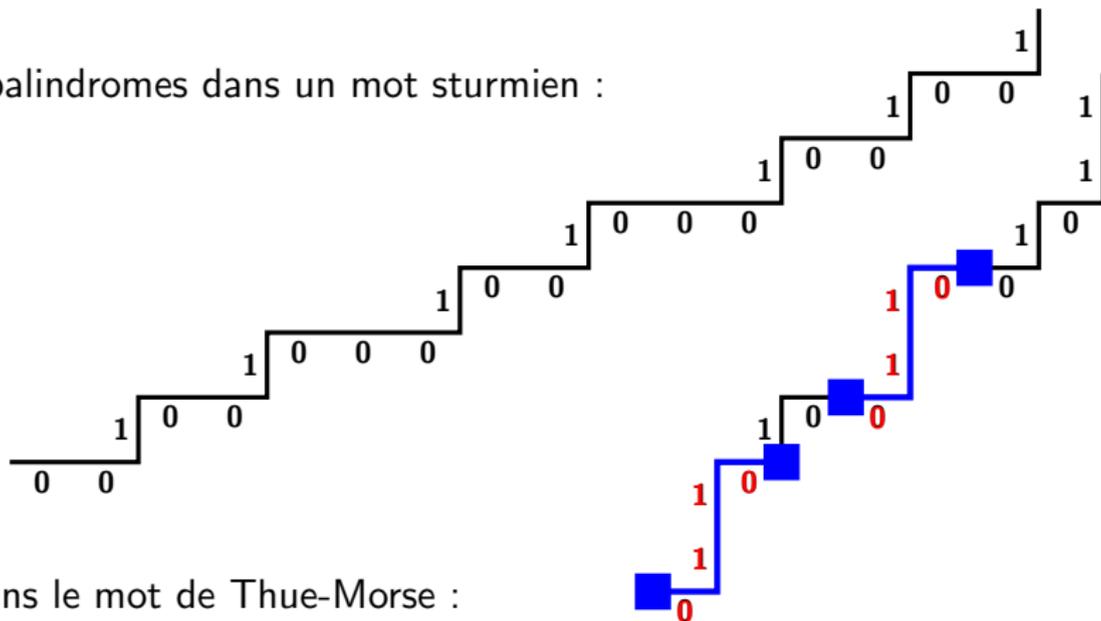
Les palindromes dans un mot sturmien :



et dans le mot de Thue-Morse :

# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :

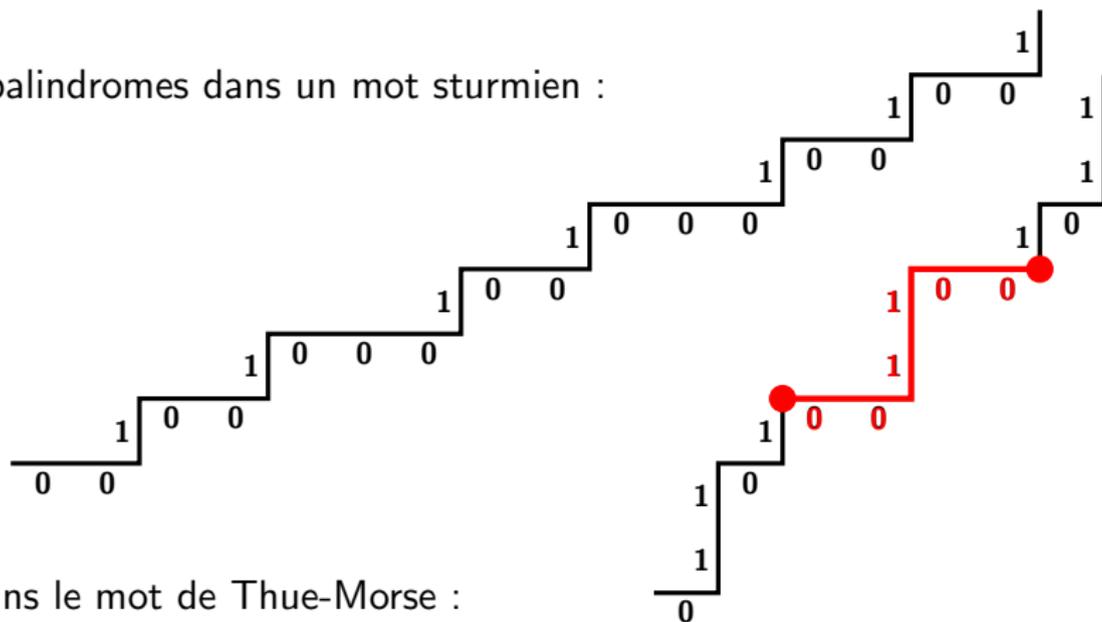


et dans le mot de Thue-Morse :

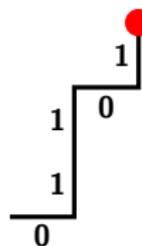


# Palindromes dans un mot sturmien

Les palindromes dans un mot sturmien :

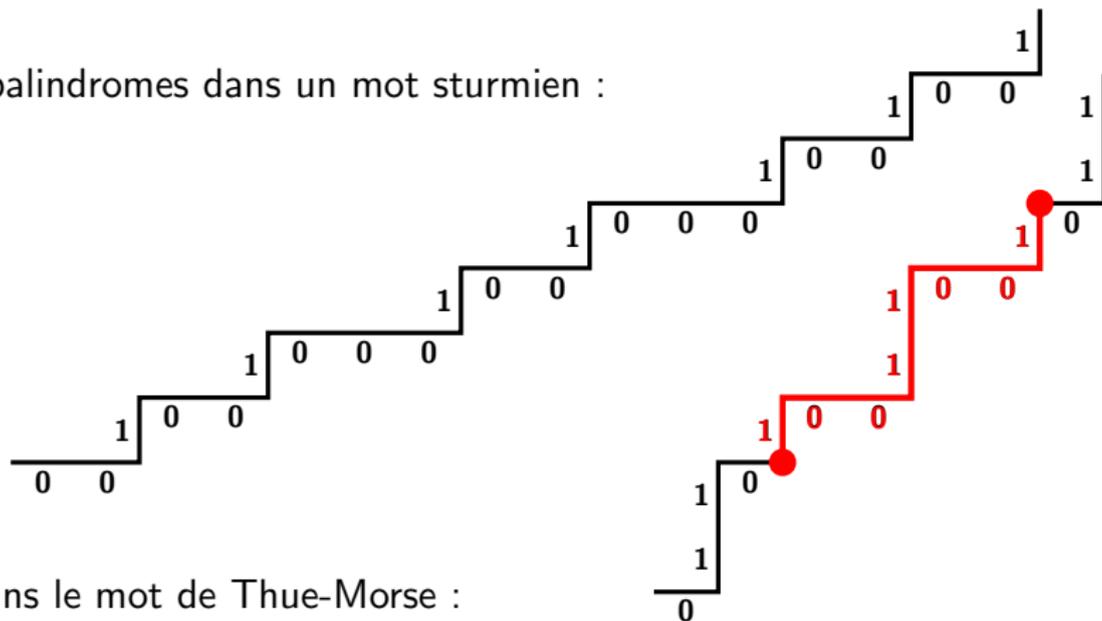


et dans le mot de Thue-Morse :

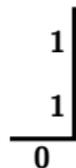


# Palindromes dans un mot Sturmien

Les palindromes dans un mot Sturmien :



et dans le mot de Thue-Morse :





## Theorem (Droubay, Justin, Pirillo, 2001)

Les *mots sturmiens*  $w$  atteignent la borne supérieure, i.e.

$$|\text{Pal}(w)| = |w| + 1.$$

## Definition (Brlek, Hamel, Nivat, Reutenauer, 2004)

Un mot  $w$  est dit **plein** si  $|\text{Pal}(w)| = |w| + 1$ .

Depuis 2008, certains auteurs utilisent le mot **riche** plutôt que plein. Je préfère utiliser le mot **plein**, car ce mot évoque qu'une limite est atteinte.

Le **codage de rotations** de paramètres  $(x, \alpha, \beta)$  est le mot  $C = c_0c_1c_2 \dots$  tel que

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{if } x + i\alpha \in [0, \beta) \\ 1 & \text{if } x + i\alpha \in [\beta, 1) \end{cases}$$

Theorem (Blondin Massé, Brlek, L., Vuillon, 2009)

*Les codages de rotations sur deux intervalles de paramètres  $(x, \alpha, \beta)$  sont **pleins**.*

Note : si  $\beta = 1 - \alpha$ , alors  $C$  est un mot **sturmien**, donc ce théorème est une généralisation de ce qui était connu.



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Theoretical Computer Science

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/tcs](http://www.elsevier.com/locate/tcs)



## Palindromic complexity of codings of rotations

A. Blondin Massé<sup>a,b,\*</sup>, S. Brlek<sup>a</sup>, S. Labbé<sup>a,c</sup>, L. Vuillon<sup>b</sup>

<sup>a</sup> LaCIM, Université du Québec à Montréal, C. P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal (QC), Canada H3C 3P8

<sup>b</sup> Laboratoire de mathématiques, CNRS UMR 5127, Université de Savoie, 73376 Le Bourget-du-lac cedex, France

<sup>c</sup> LIRMM, UMR 5506 CNRS, Université Montpellier II, 34392 Montpellier, France

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 5 January 2010

Received in revised form 11 February 2011

Accepted 2 August 2011

Communicated by J. Karhumaki

#### Keywords:

Codings of rotations

Sturmian

Rote

Return words

Full words

### ABSTRACT

We study the palindromic complexity of infinite words obtained by coding rotations on partitions of the unit circle by inspecting the return words. The main result is that every coding of rotations on two intervals is full, that is, it realizes the maximal palindromic complexity. As a byproduct, a slight improvement about return words in codings of rotations is obtained: every factor of a coding of rotations on two intervals has at most 4 complete return words, where the bound is realized only for a finite number of factors. We also provide a combinatorial proof for the special case of complementary-symmetric Rote sequences by considering both palindromes and antipalindromes occurring in it.

© 2011 Elsevier B.V. All rights reserved.

### 1. Introduction

A coding of rotations is a symbolic sequence obtained from iterative rotations of a point  $x$  by an angle  $\alpha$  and according

- 1 Structure des pavages par un polyomino
- 2 Complexité palindromique
- 3 Droites discrètes 3D

# An Arithmetic and Combinatorial Approach to Three-Dimensional Discrete Lines

Valérie Berthé<sup>1</sup> and Sébastien Labbé<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d'Informatique Algorithmique : Fondements et Applications,  
Université Paris Diderot, Paris 7 - Case 7014  
F-75205 Paris Cedex 13, France

`berthe@liafa.jussieu.fr`

<sup>2</sup> Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique,  
Université du Québec à Montréal,  
C.P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal (QC), Canada H3C 3P8  
`labbe.sebastien@courrier.uqam.ca`

**Abstract.** The aim of this paper is to discuss from an arithmetic and combinatorial viewpoint a simple algorithmic method of generation of discrete segments in the three-dimensional space. We consider discrete segments that connect the origin to a given point  $(u_1, u_2, u_3)$  with co-prime nonnegative integer coordinates. This generation method is based on generalized three-dimensional Euclid's algorithms acting on the triple

# Uniformly balanced words with linear complexity and prescribed letter frequencies

Valérie Berthé

Laboratoire d'Informatique Algorithmique : Fondements et Applications  
Université Paris Diderot  
Paris 7 - Case 7014  
F-75205 Paris Cedex 13, France  
berthe@liafa.jussieu.fr

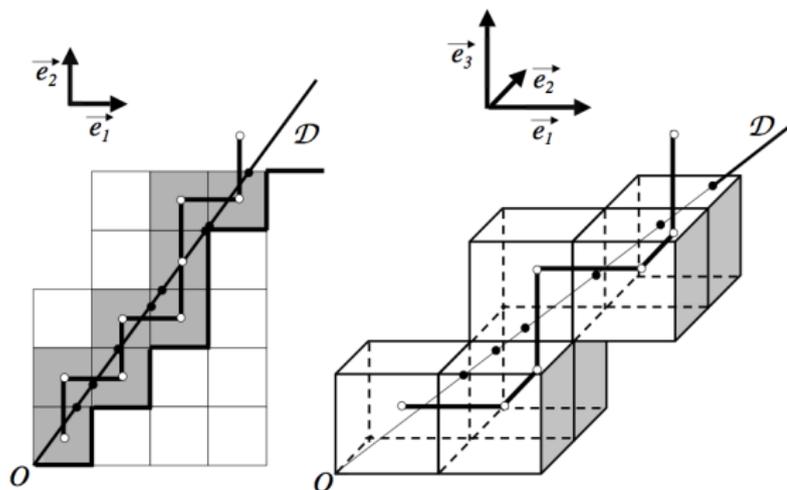
Sébastien Labbé

Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique,  
Université du Québec à Montréal,  
C.P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal (QC), Canada H3C 3P8  
labbe.sebastien@courrier.uqam.ca

We consider the following problem. Let us fix a finite alphabet  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$ ; for any  $d$ -uple of letter frequencies  $(f_1, \dots, f_d) \in [0, 1]^d$  with  $\sum_{i=1}^d f_i = 1$ , how to construct an infinite word  $u$  over the alphabet  $\mathcal{A}$  satisfying the following conditions:  $u$  has linear complexity function,  $u$  is uniformly balanced, the letter frequencies in  $u$  are given by  $(f_1, \dots, f_d)$ . This paper investigates a construction method for such words based on the use of mixed multidimensional continued fraction algorithms.

**Keywords:** balanced words, discrepancy, letter frequency, multidimensional continued fractions, discrete geometry

# Billard dans un cube



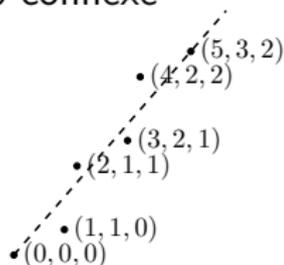
Source de l'image :  
J. -P. Borel, Complexity of Degenerated Three Dimensional Billiard Words, Developments in Language Theory 4036 (2006) 386-396.

Theorem (Arnoux, Mauduit, Shiokawa, Tamura, 1994)

Si la direction initiale est *totale*ment irrationnelle, le nombre de facteurs distincts apparaissant dans le mot de billard dans un cube est exactement  $p(n) = n^2 + n + 1$ .

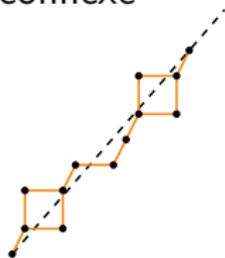
Étant donné le vecteur directeur  $(5, 3, 2)$ , on a :

Reveillès (1995) :  
26-connexe



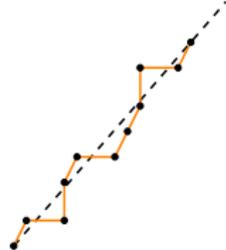
$$\begin{aligned} -5/2 \leq 2x - 5z < 5/2 \\ -5/2 \leq 3x - 5y < 5/2 \end{aligned}$$

Reveillès (1995) :  
6-connexe



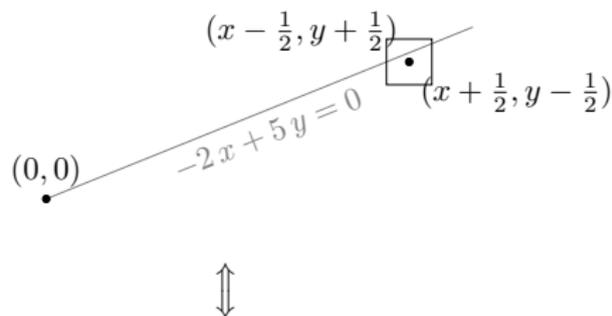
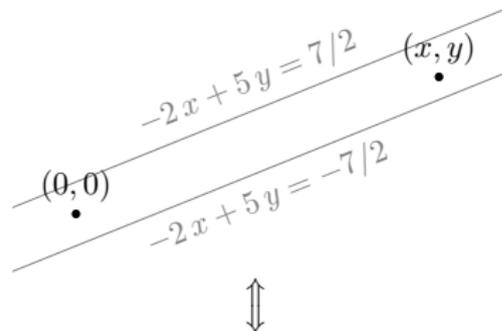
$$\begin{aligned} -7/2 \leq 2x - 5z < 7/2 \\ -8/2 \leq 3x - 5y < 8/2 \end{aligned}$$

Andres (2003) :  
6-connexe et minimale



$$\begin{aligned} -7/2 \leq 2x - 5z < 7/2 \\ -8/2 \leq 3x - 5y < 8/2 \\ -5/2 \leq 2y - 3z < 5/2 \end{aligned}$$

# La droite d'Andres correspond à un mot de billard

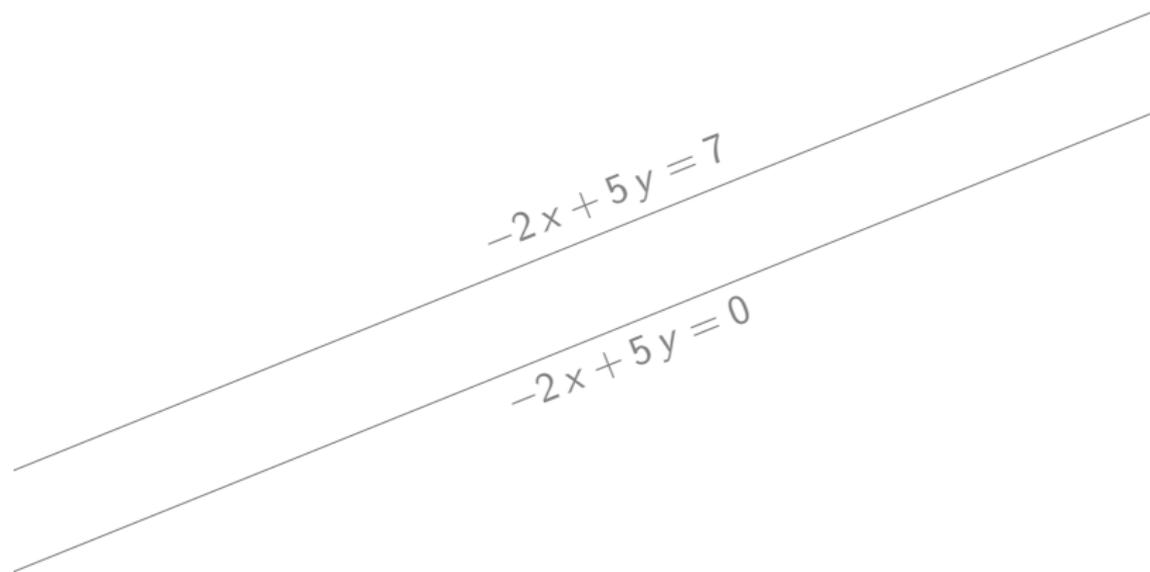


$$-7/2 < -2x + 5y \leq 7/2 \quad \iff \quad -2(x + \frac{1}{2}) + 5(y - \frac{1}{2}) \leq 0 < -2(x - \frac{1}{2}) + 5(y + \frac{1}{2})$$
$$-2x + 5y - \frac{7}{2} \leq 0 < -2x + 5y + \frac{7}{2}$$

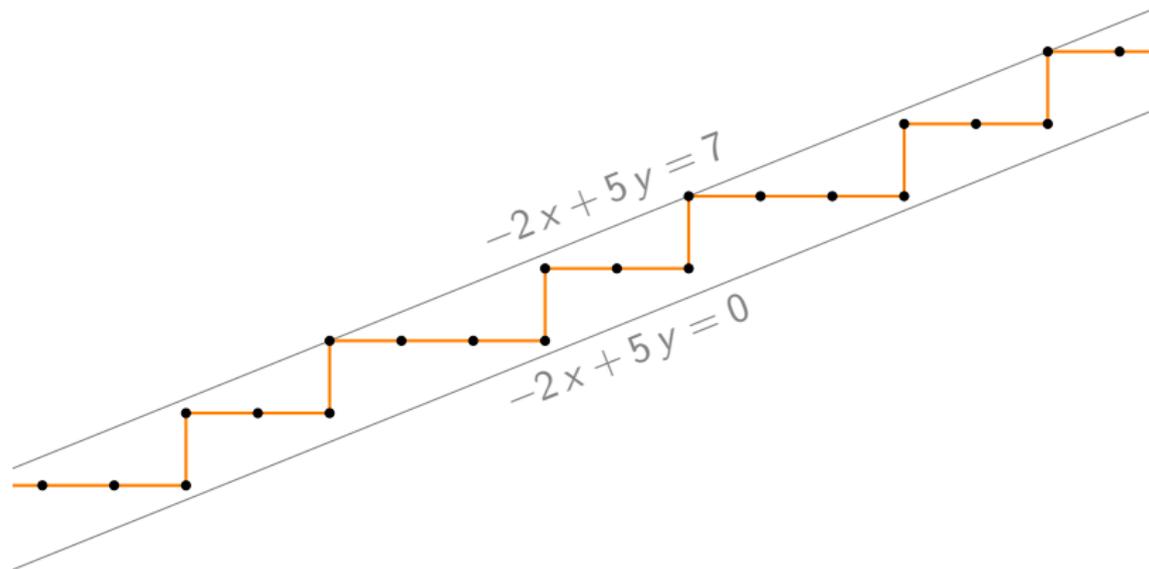
Donc, le mot associé à la droite d'Andres est un mot de billard dans un cube et sa **complexité en facteurs** est **quadratique**.

# Dynamique de la droite discrète 2D

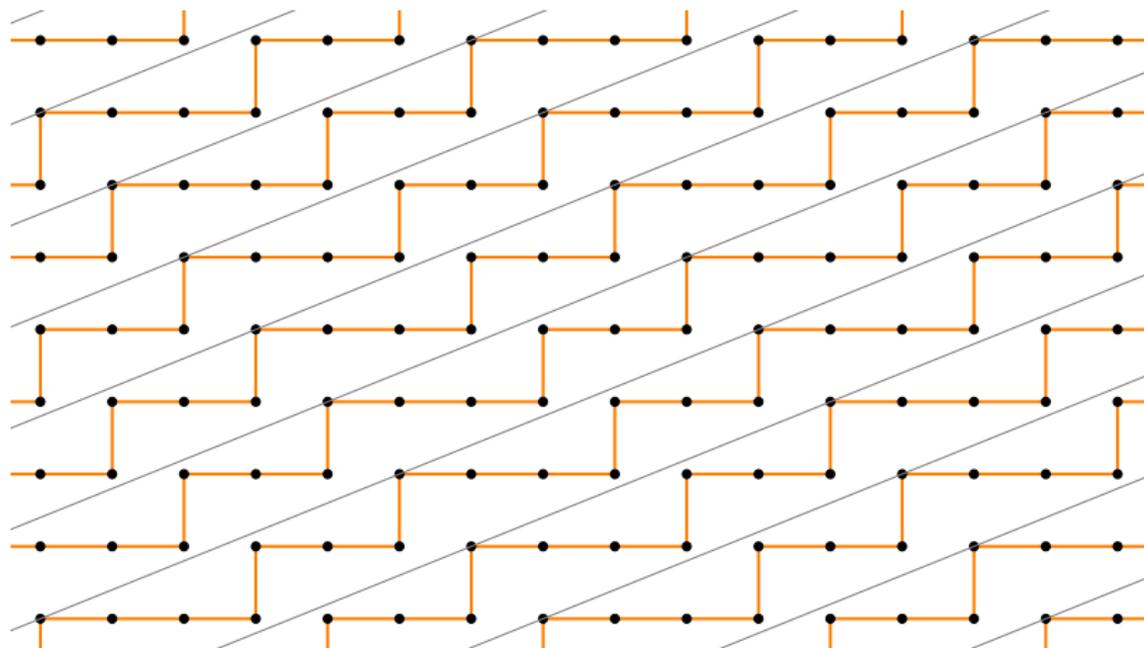
# Dynamique de la droite discrète 2D



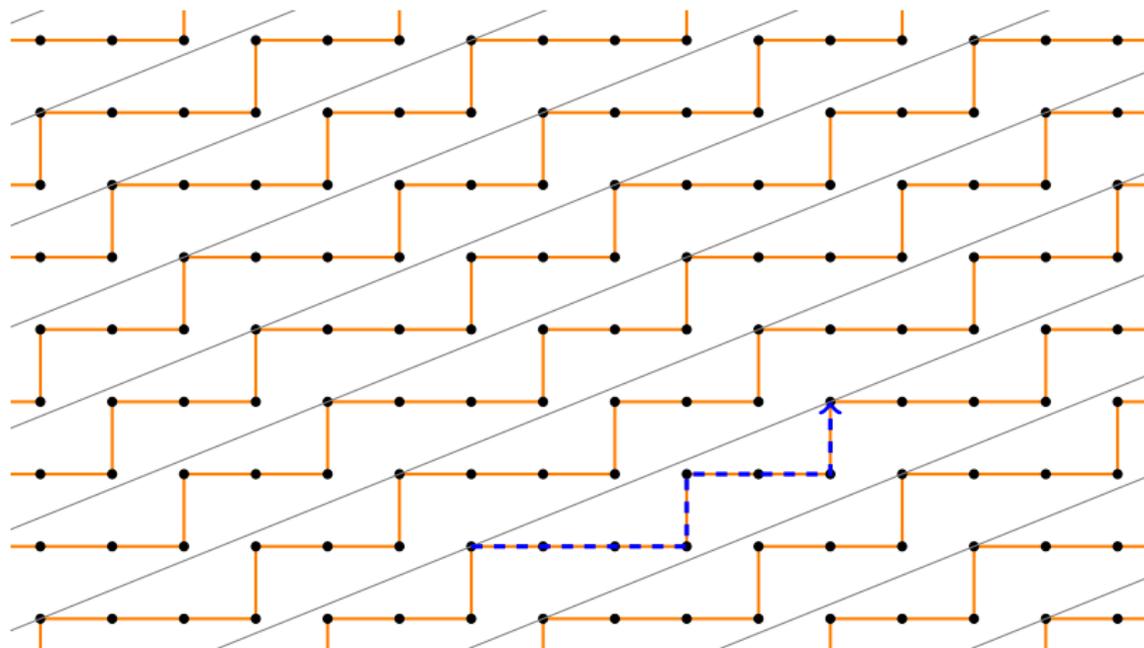
# Dynamique de la droite discrète 2D



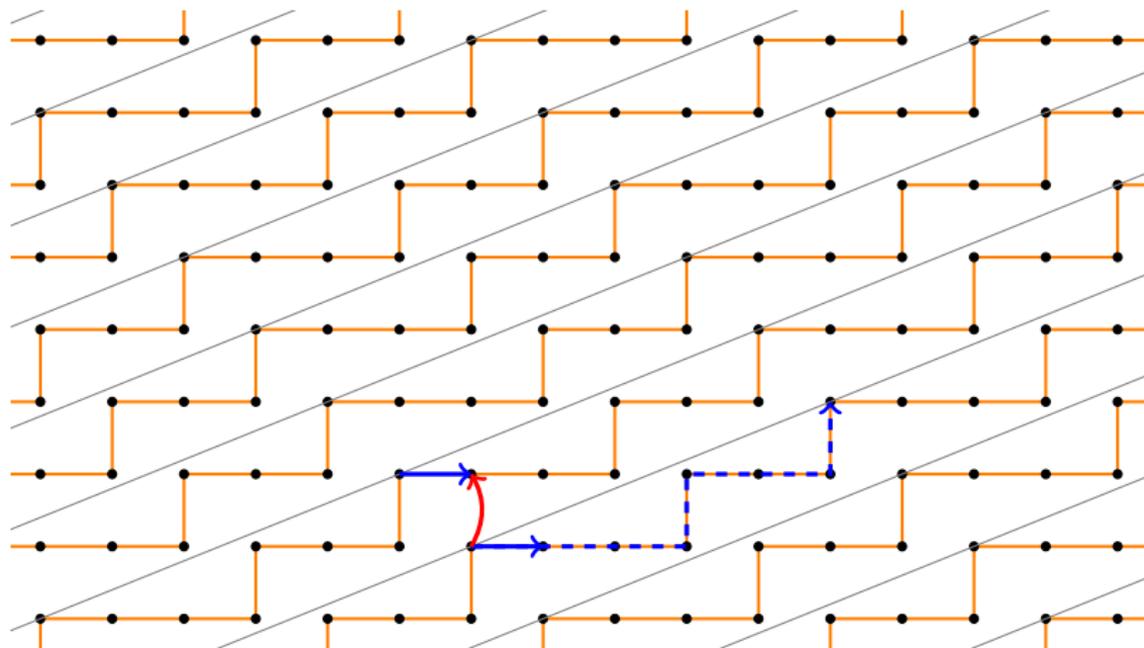
# Dynamique de la droite discrète 2D



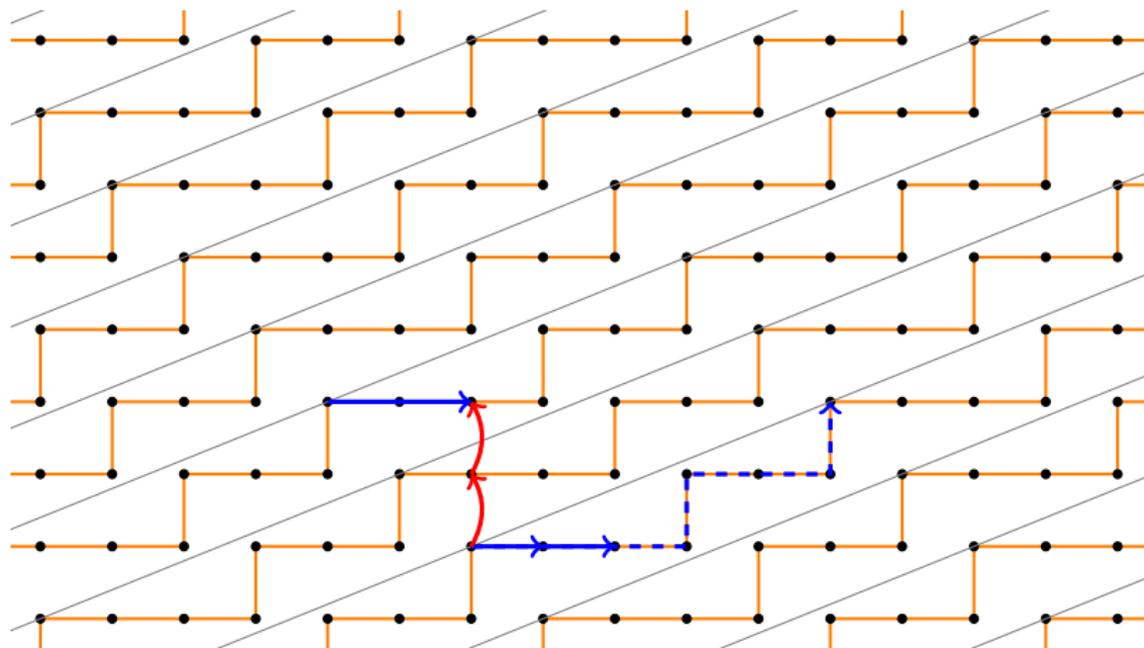
# Dynamique de la droite discrète 2D



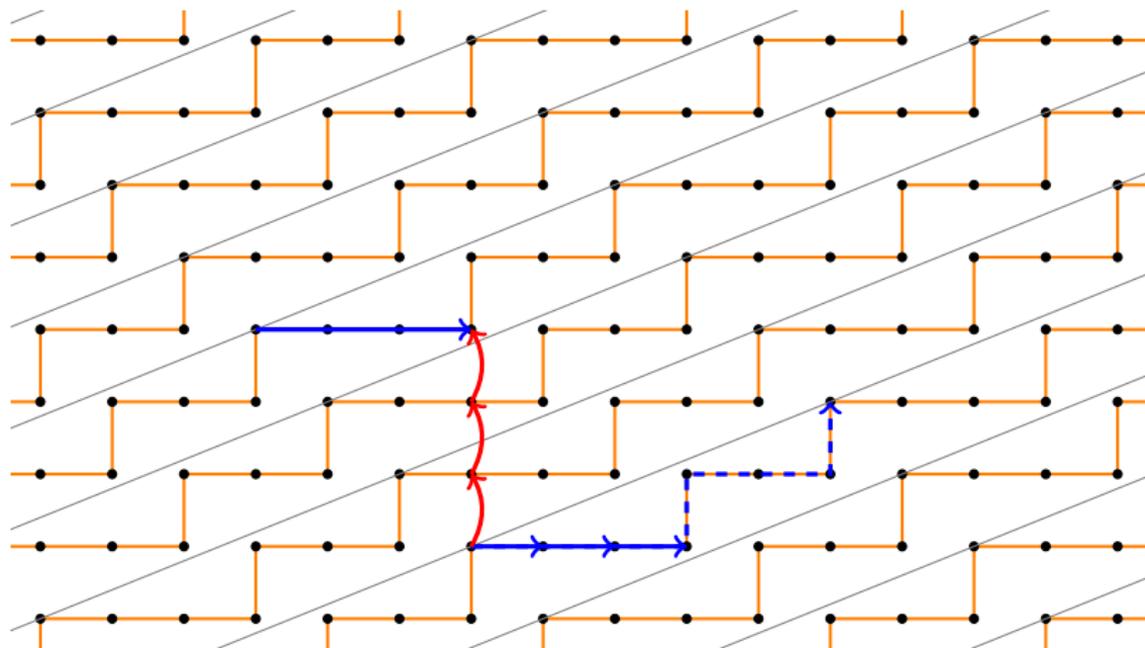
# Dynamique de la droite discrète 2D



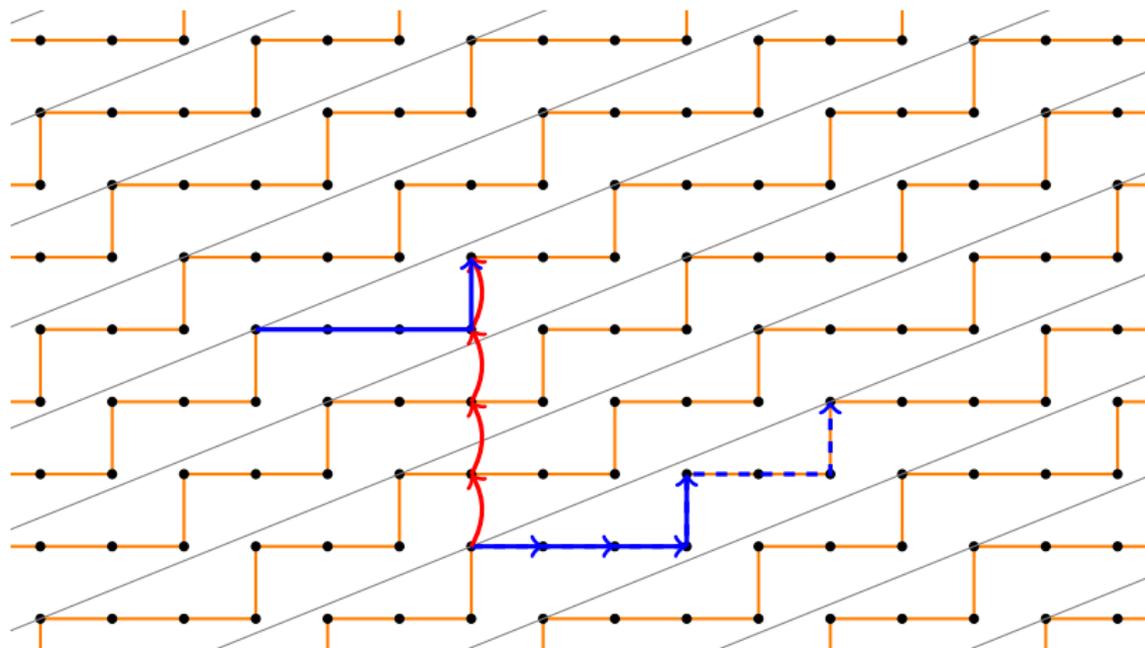
# Dynamique de la droite discrète 2D



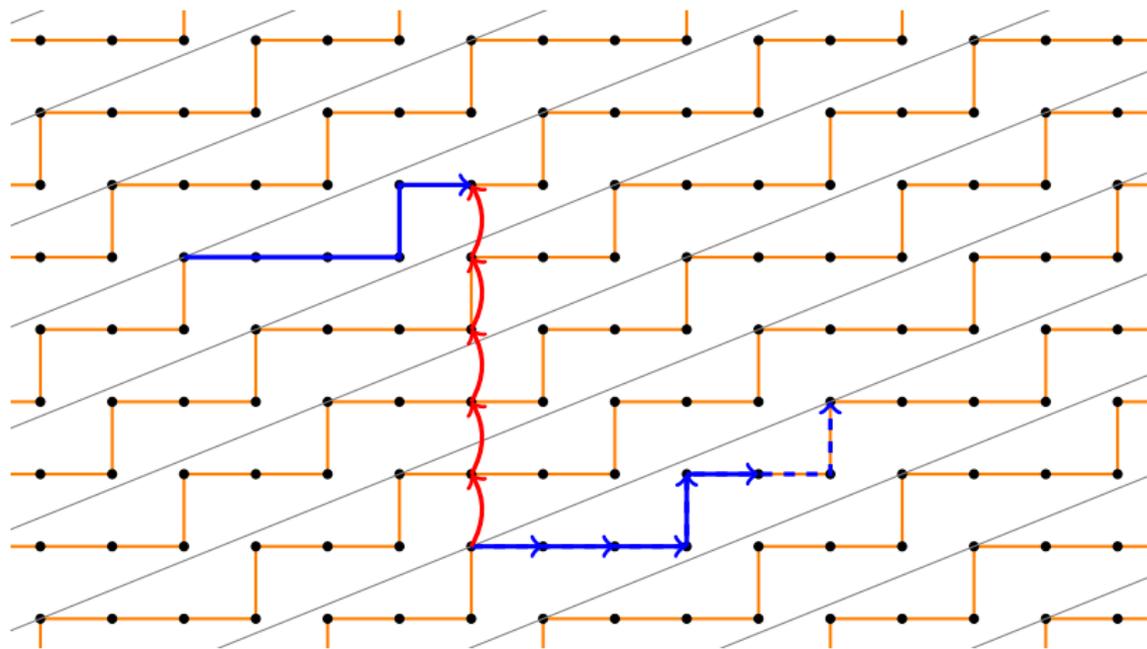
# Dynamique de la droite discrète 2D



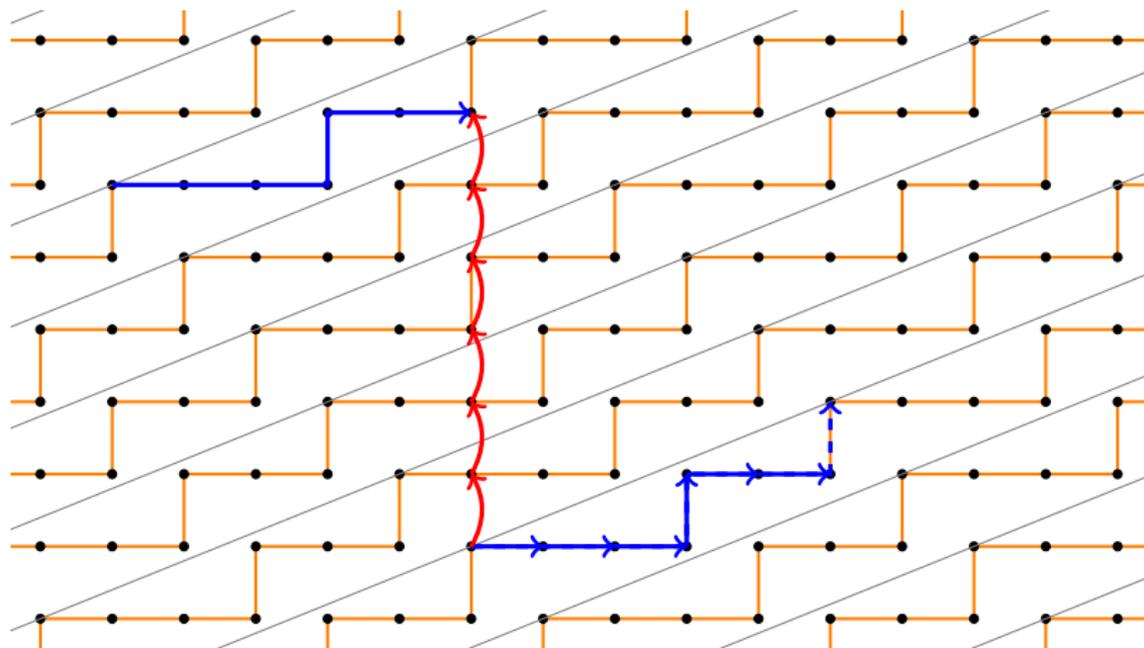
# Dynamique de la droite discrète 2D



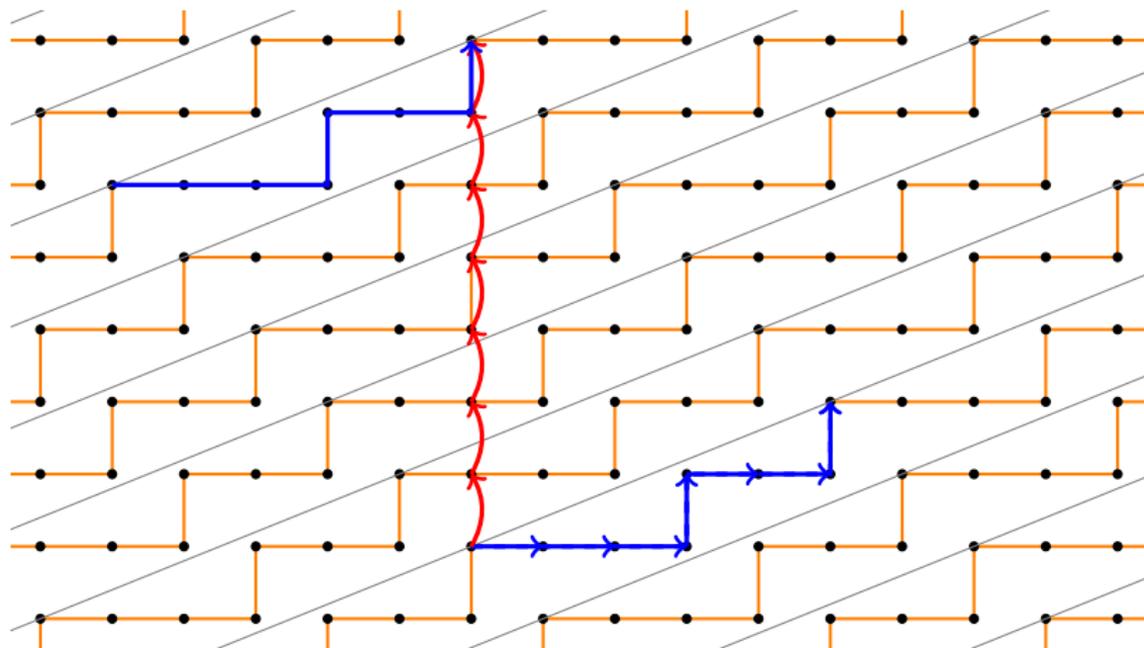
# Dynamique de la droite discrète 2D



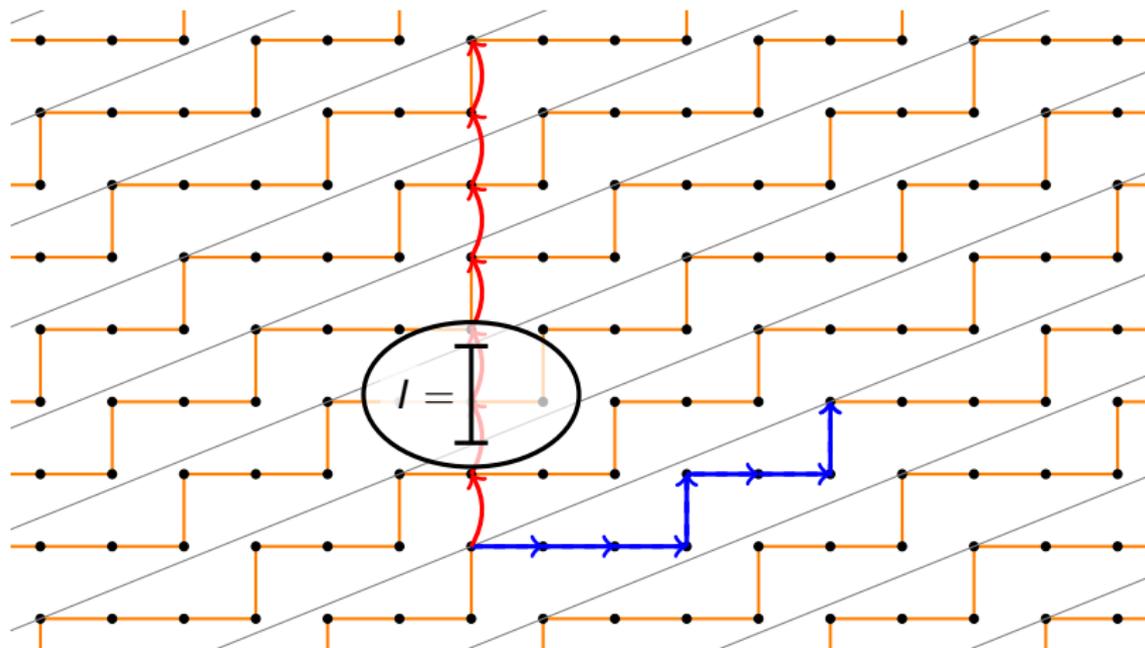
# Dynamique de la droite discrète 2D



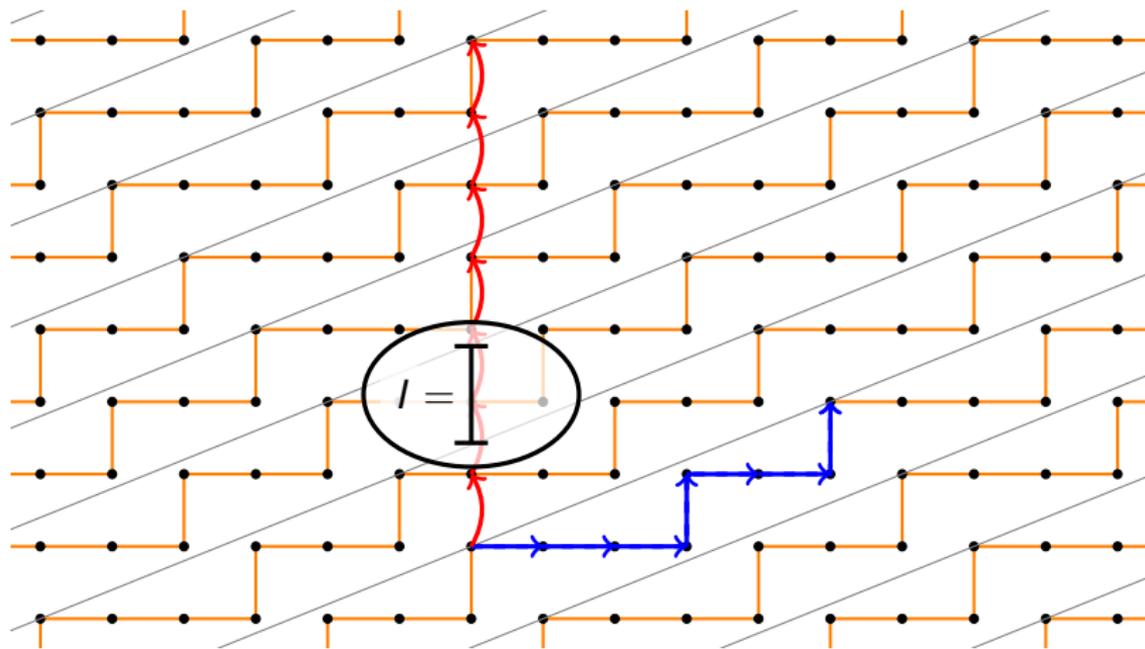
# Dynamique de la droite discrète 2D



# Dynamique de la droite discrète 2D

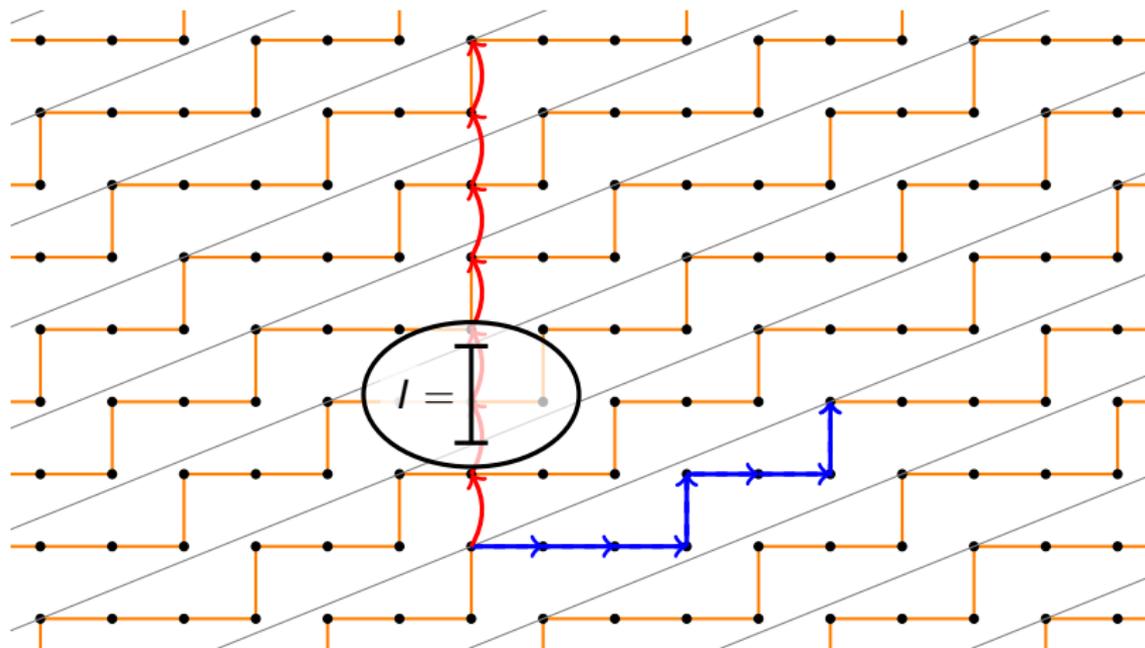


# Dynamique de la droite discrète 2D



Le **chemin discret en bleu** est le codage d'une rotation.  
L'intervall  $I$  est le **domaine fondamental** d'un système dynamique.

# Dynamique de la droite discrète 2D



Le **chemin discret en bleu** est le codage d'une rotation.

L'intervalle  $I$  est le **domaine fondamental** d'un système dynamique.

Peut-on obtenir un tel système dynamique pour les droites discrètes 3D ?

# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

Let  $\sigma$  be the substitution  $1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ .

Iterating  $\sigma$  on the letter 1 yields **increasing prefixes** :

$$\sigma^1(1) = 12$$

$$\sigma^2(1) = 1213$$

$$\sigma^3(1) = 1213121$$

$$\sigma^4(1) = 1213121121312$$

$$\sigma^5(1) = 121312112131212131211213$$

$\vdots$

$$\sigma^\infty(1) = 1213121121312121312112131213121121312121\dots$$

$\sigma^\infty(1)$  is the **fixed point** of  $\sigma$  and  $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  is its **incidence matrix**.

# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

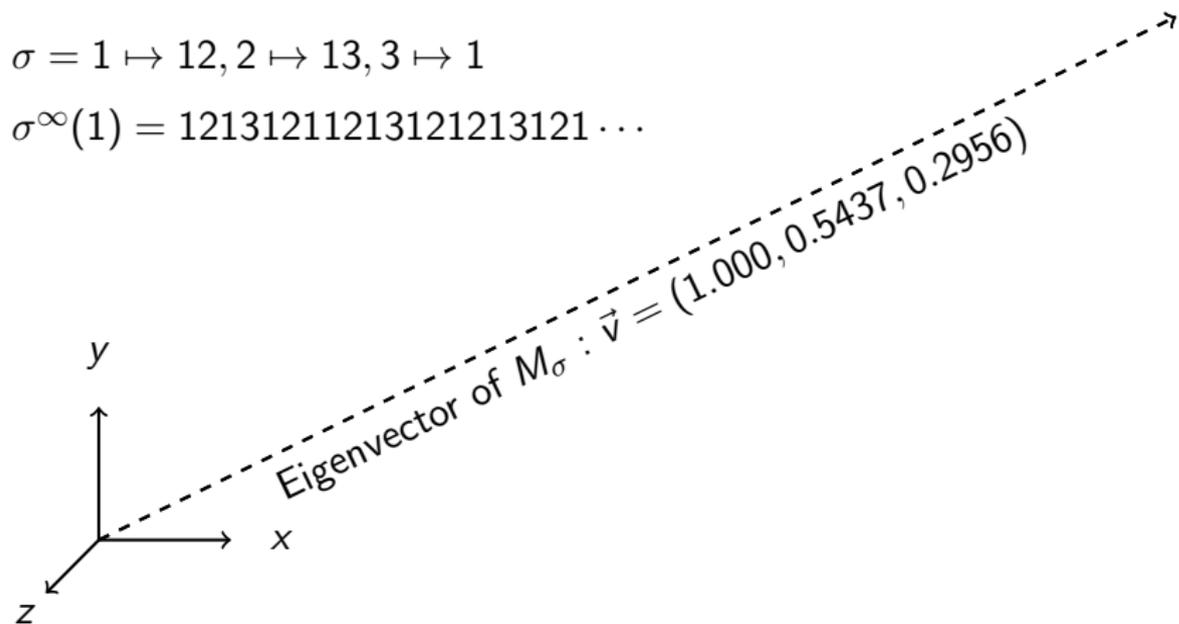
$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$

# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

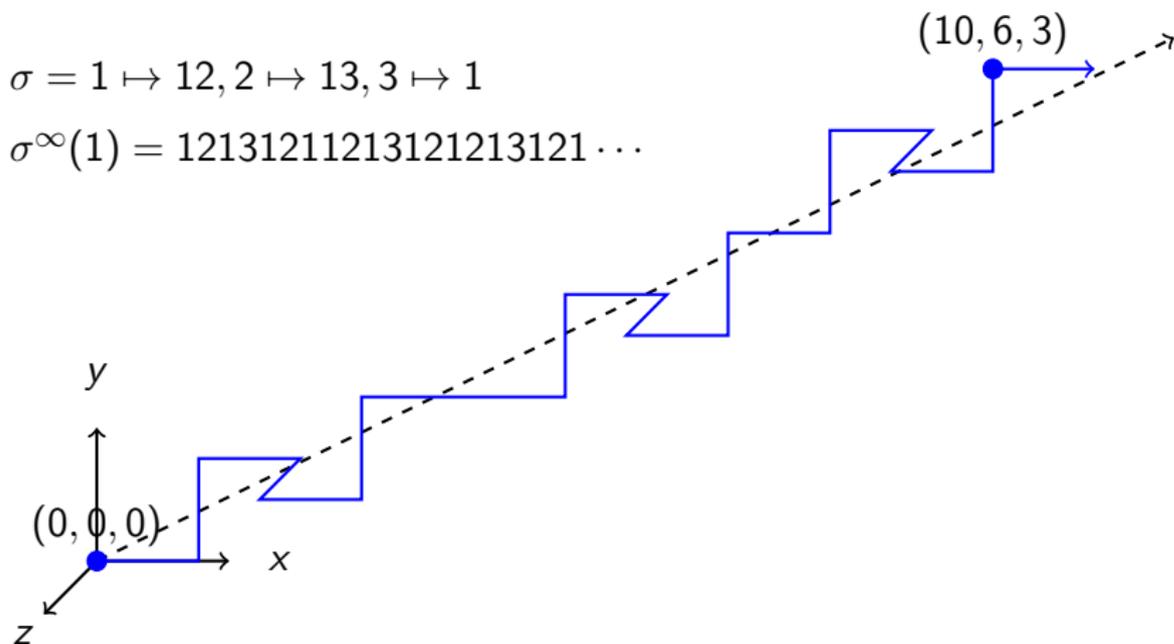
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

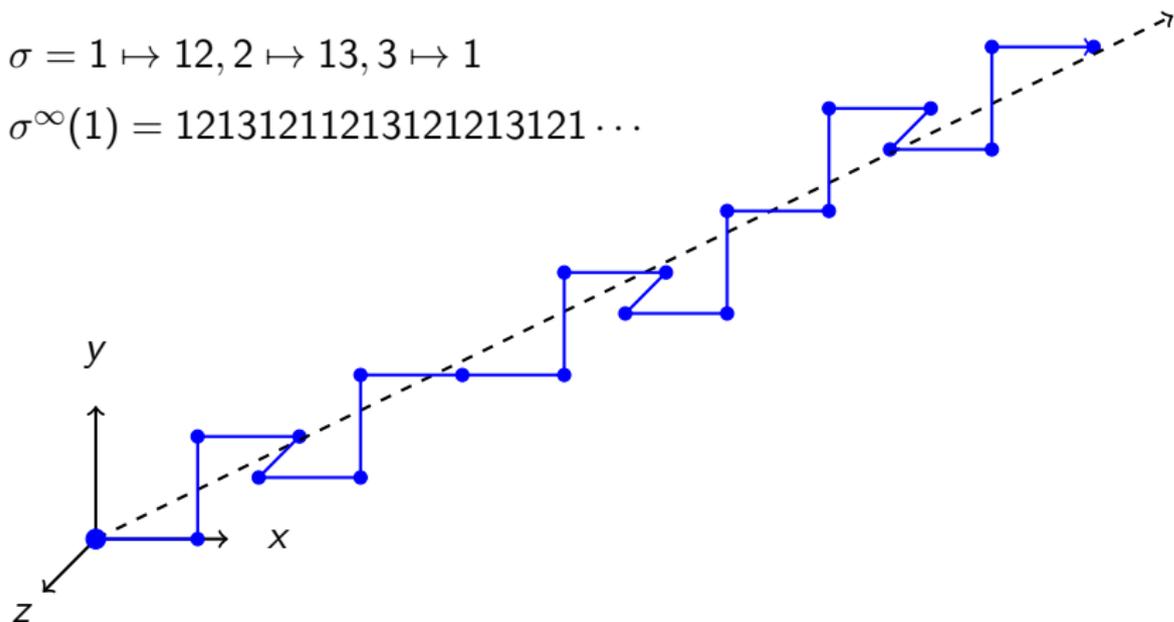
$$\sigma^\infty(1) = 12131211121312121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

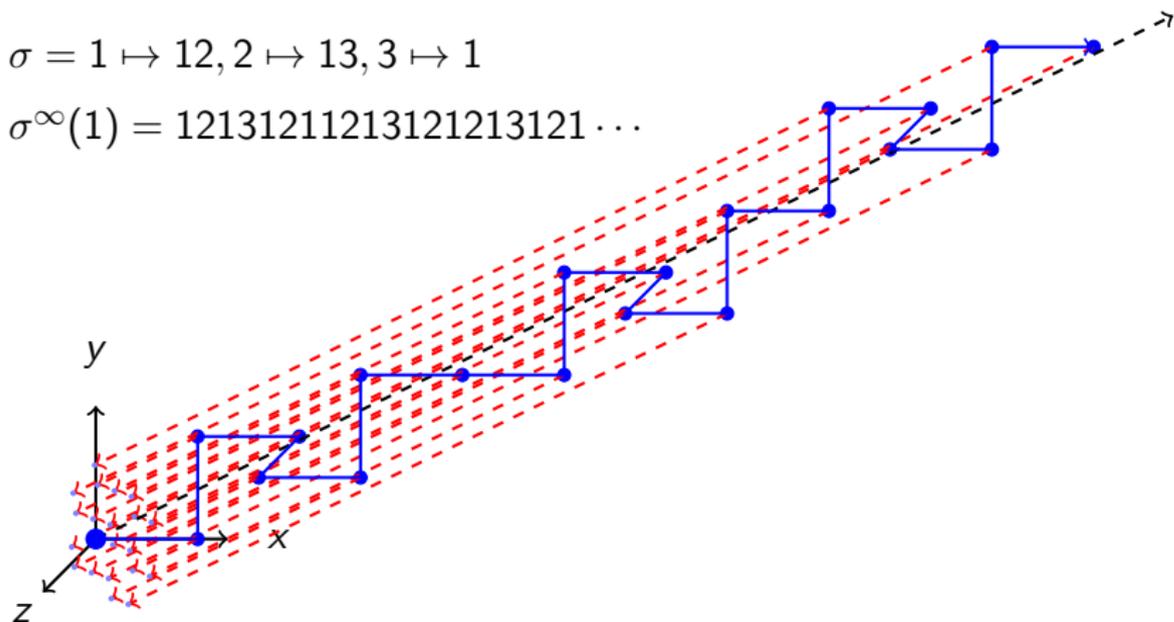
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

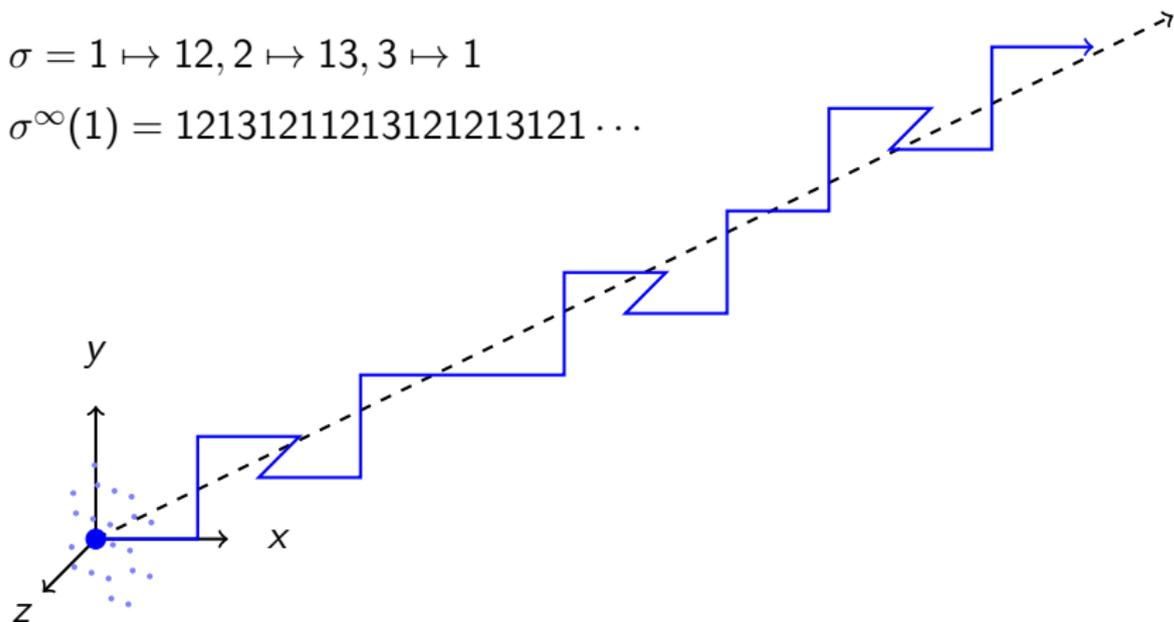
$$\sigma^\infty(1) = 12131211121312121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

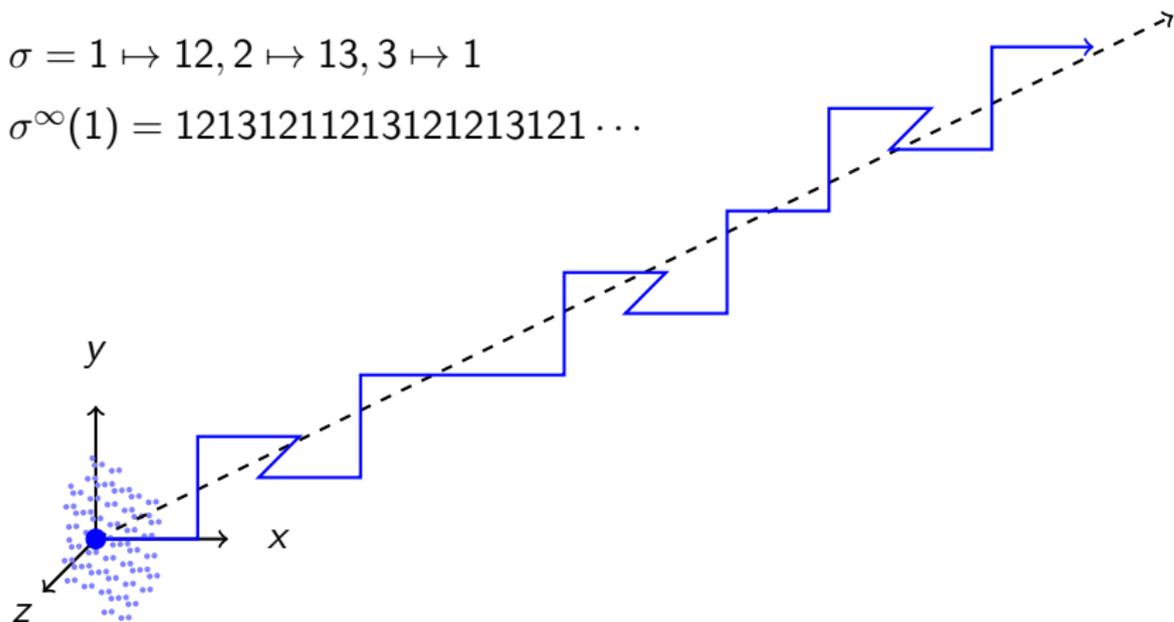
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

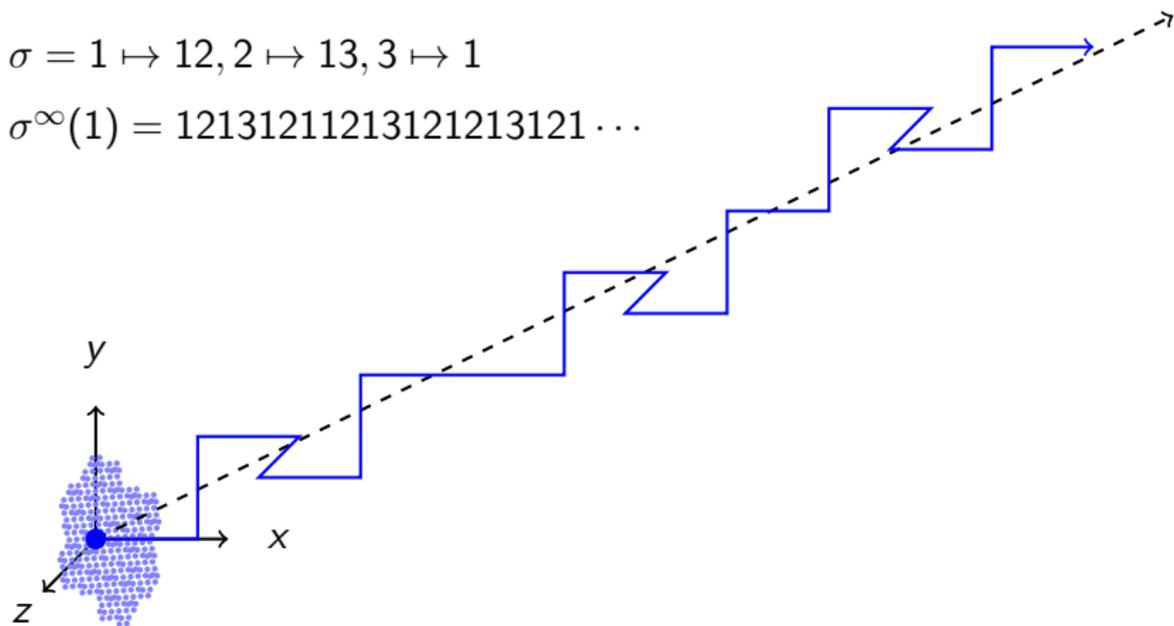
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

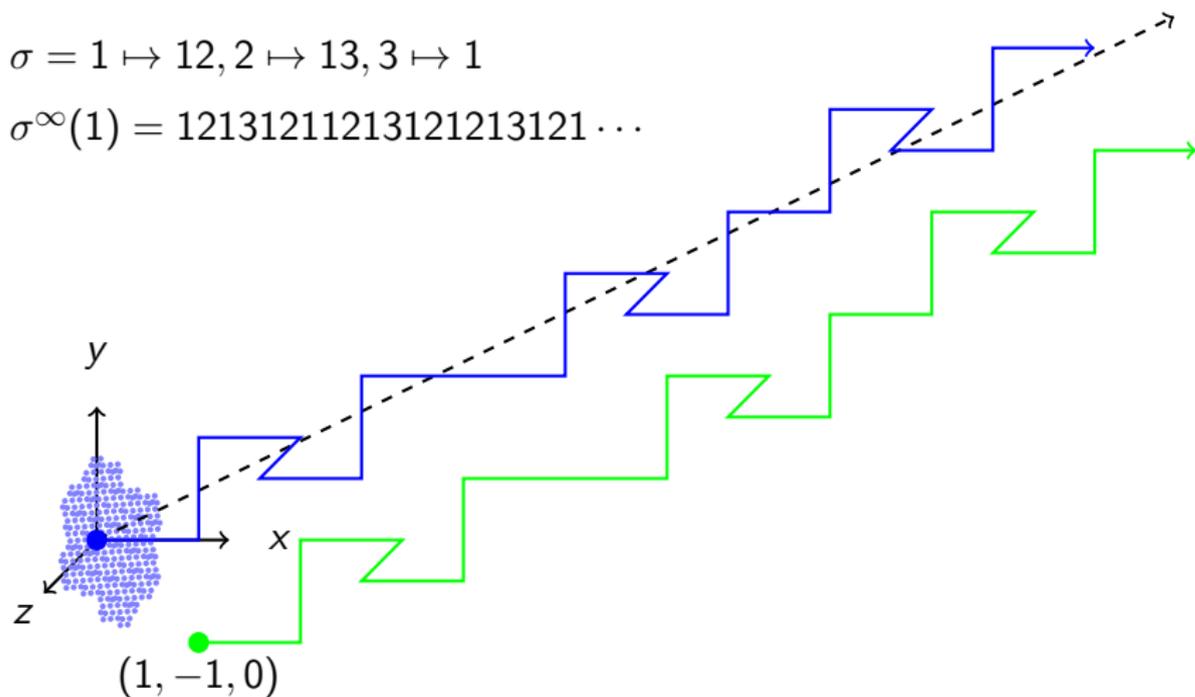
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

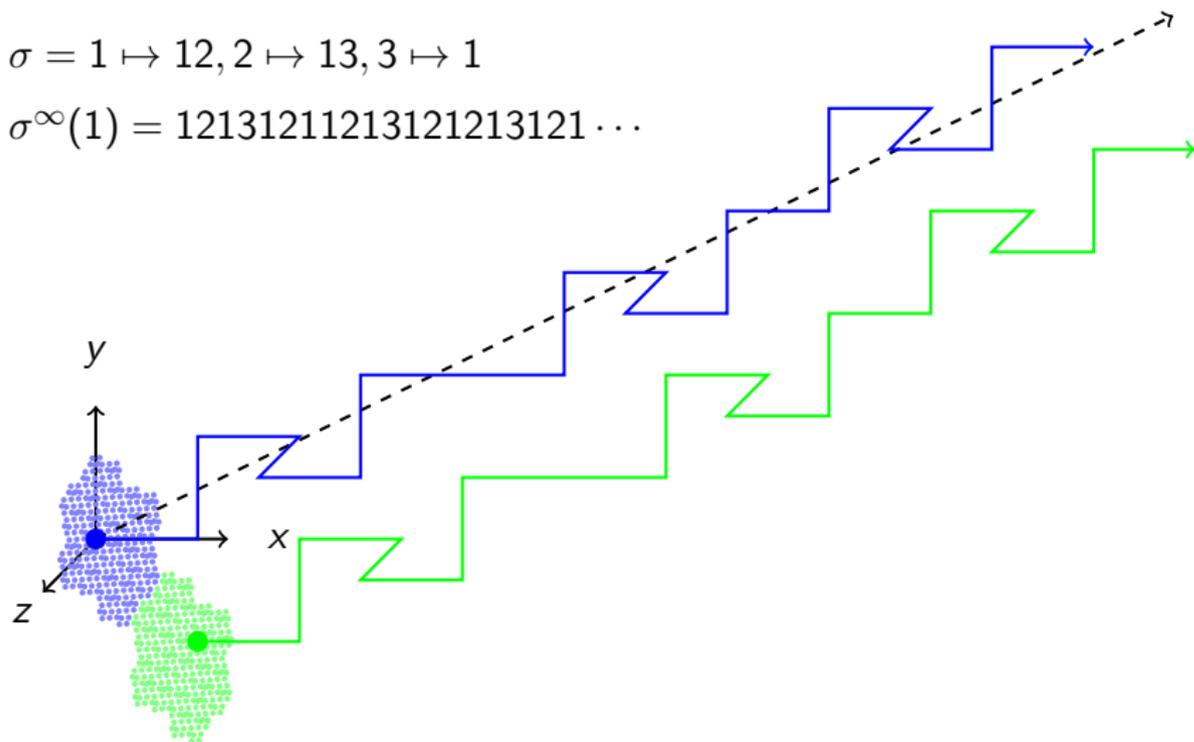
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

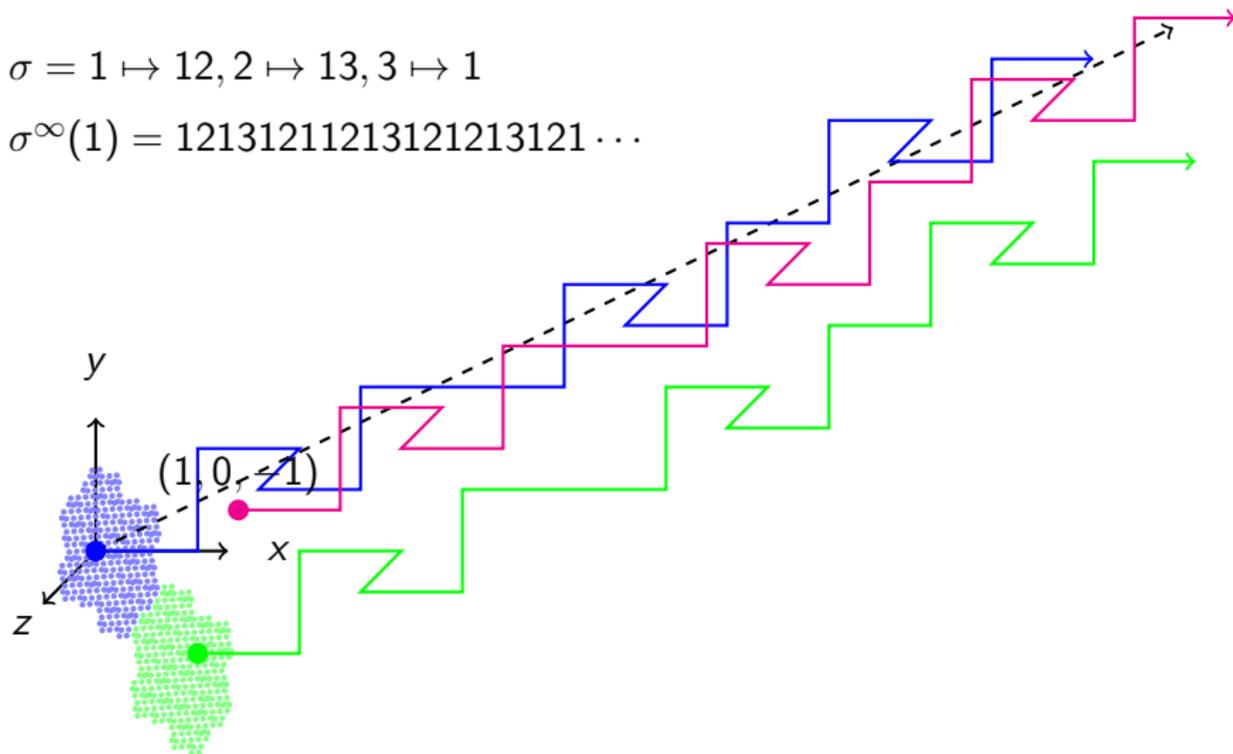
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

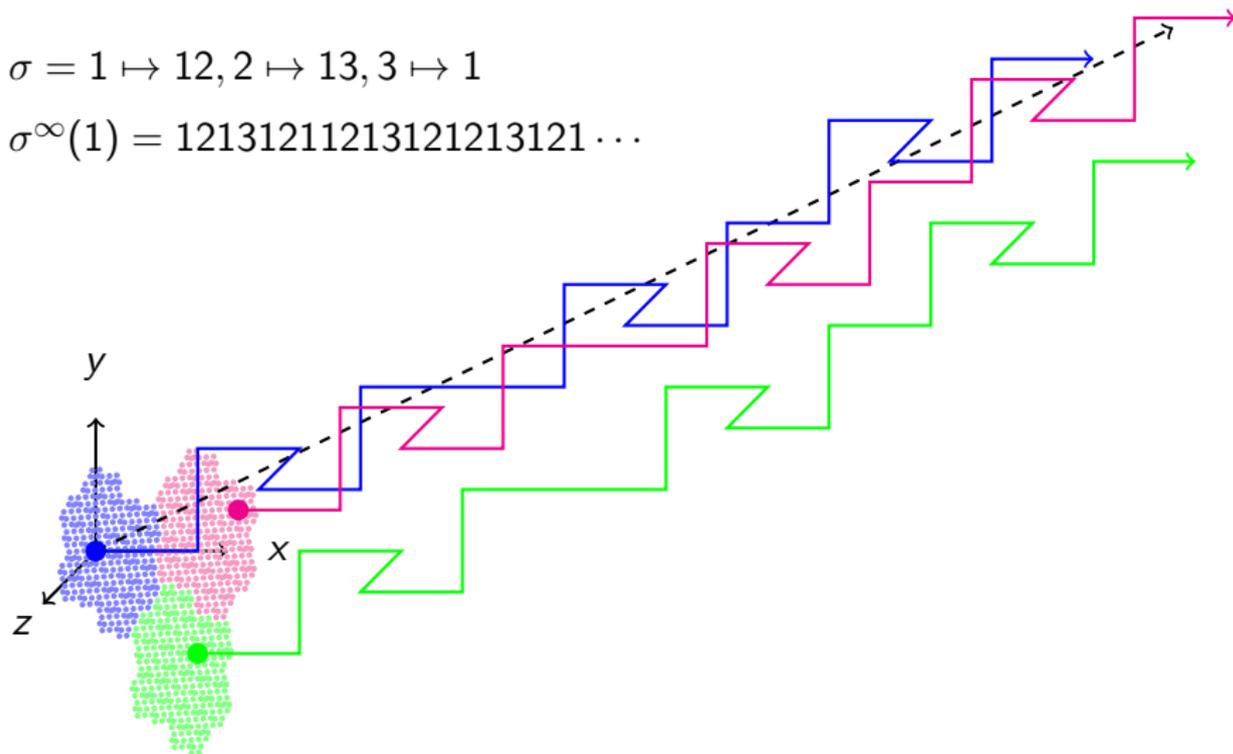
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

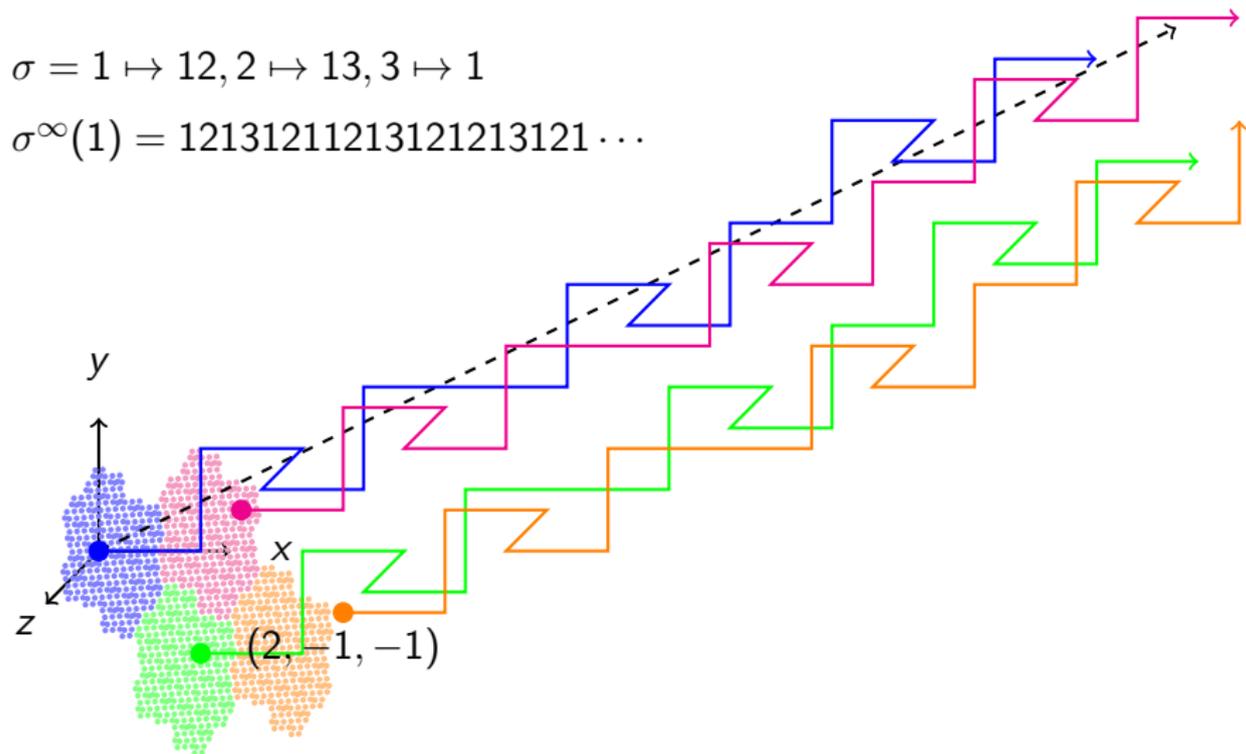
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

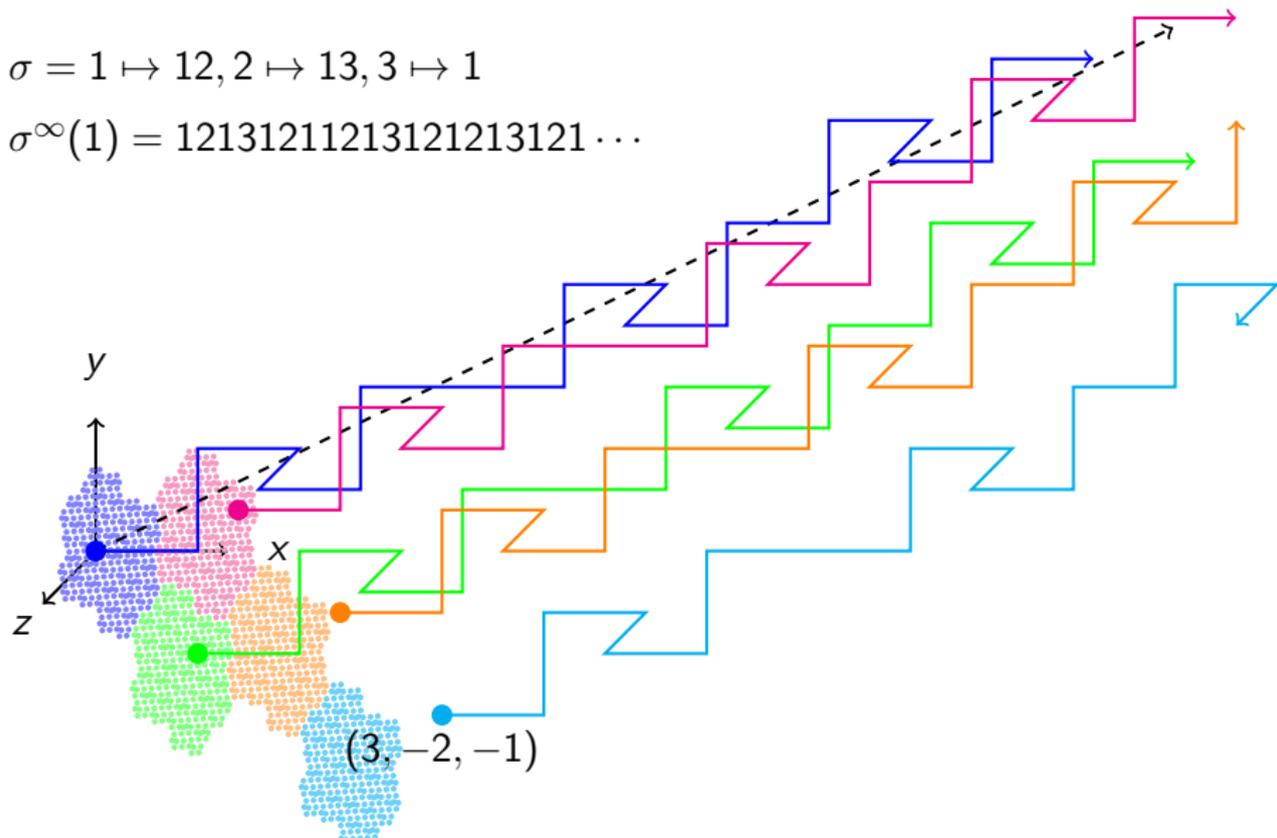
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

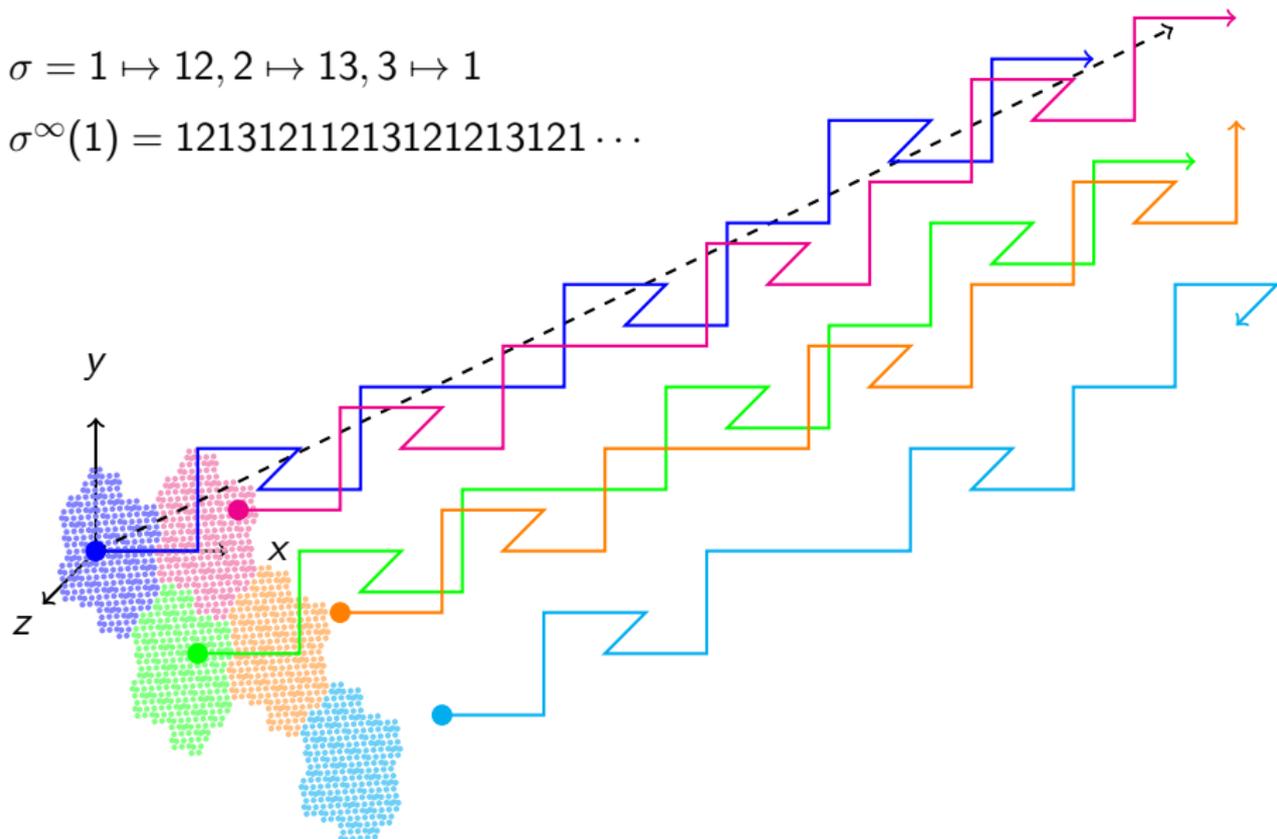
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

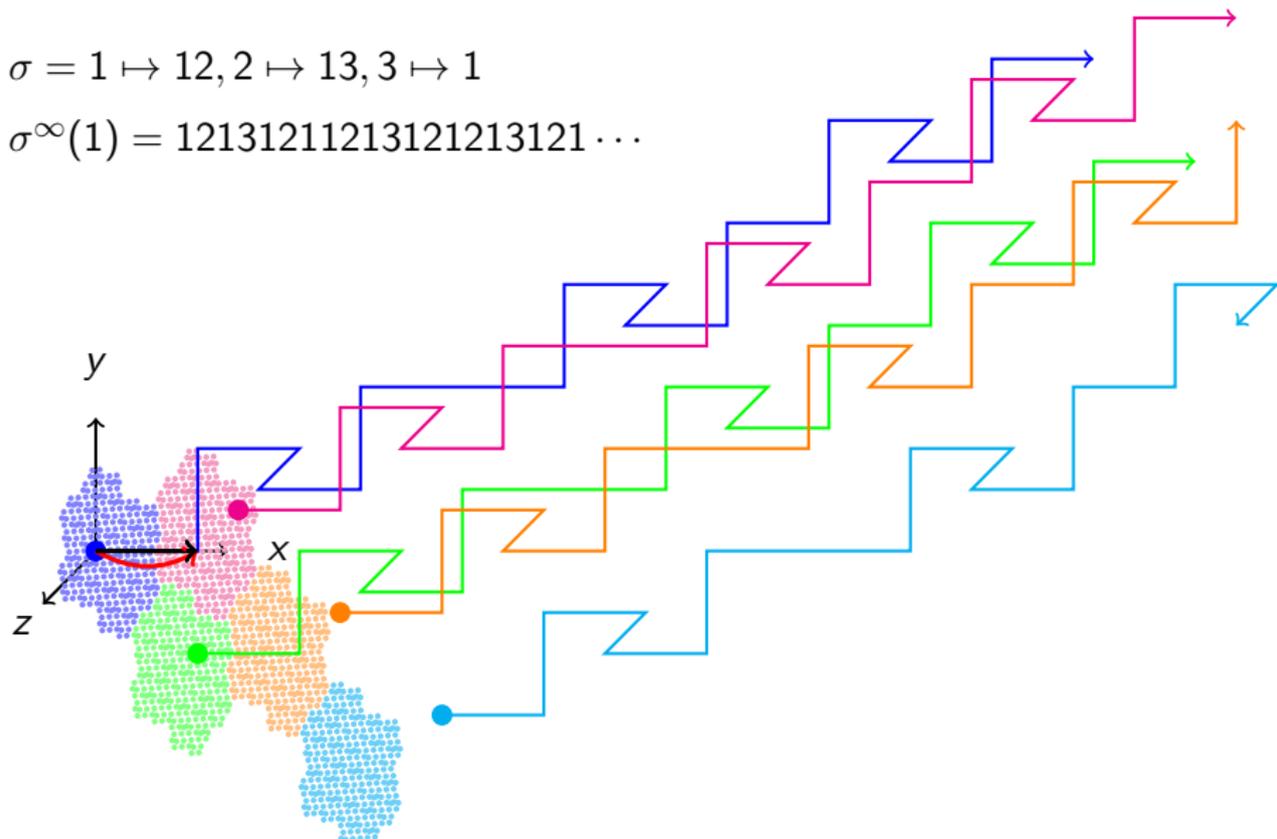
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

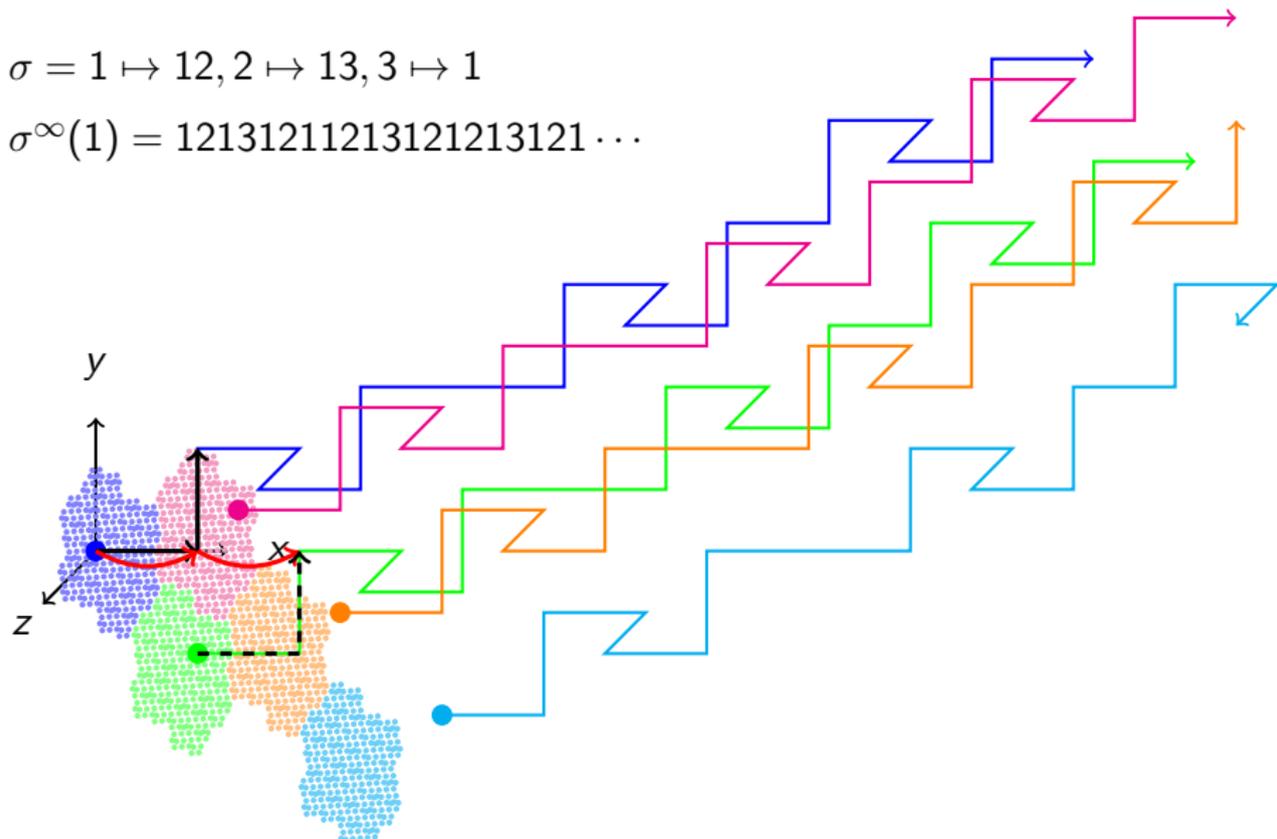
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

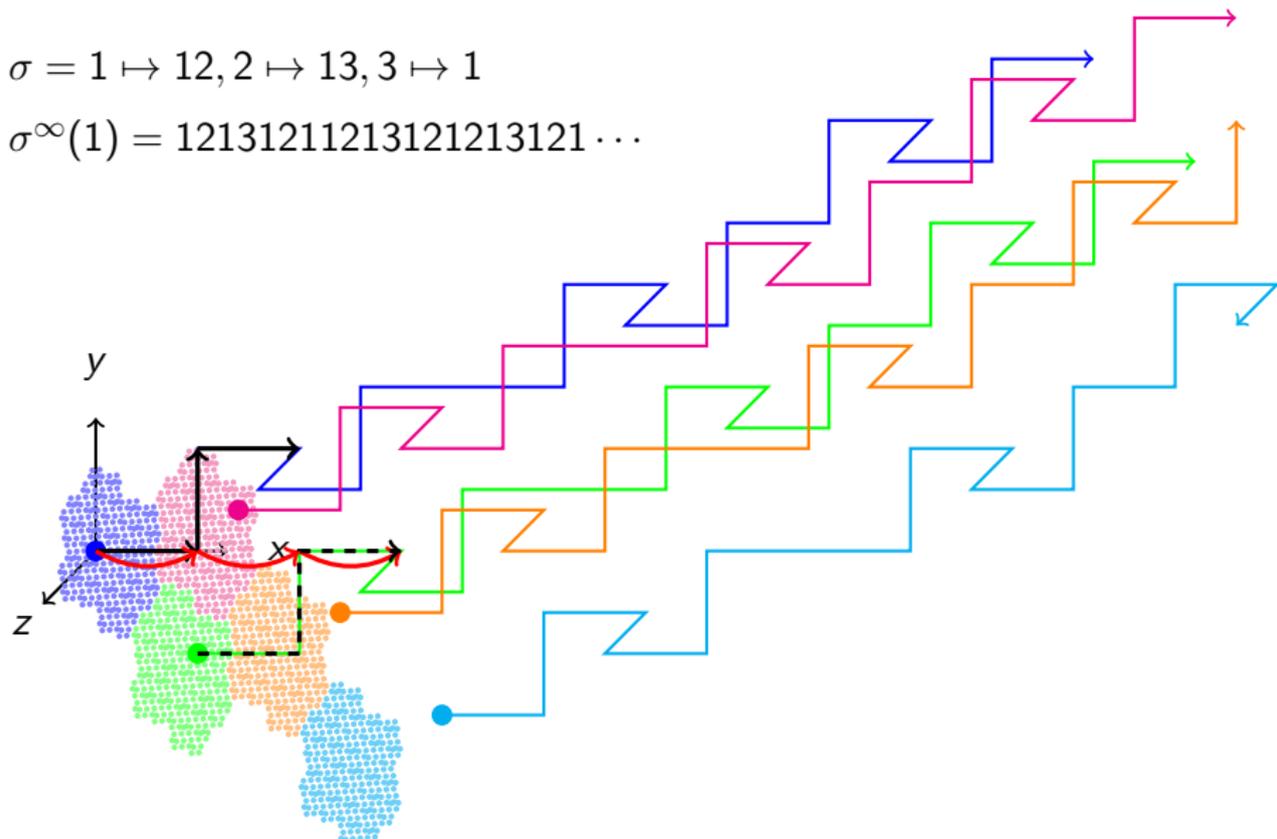
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

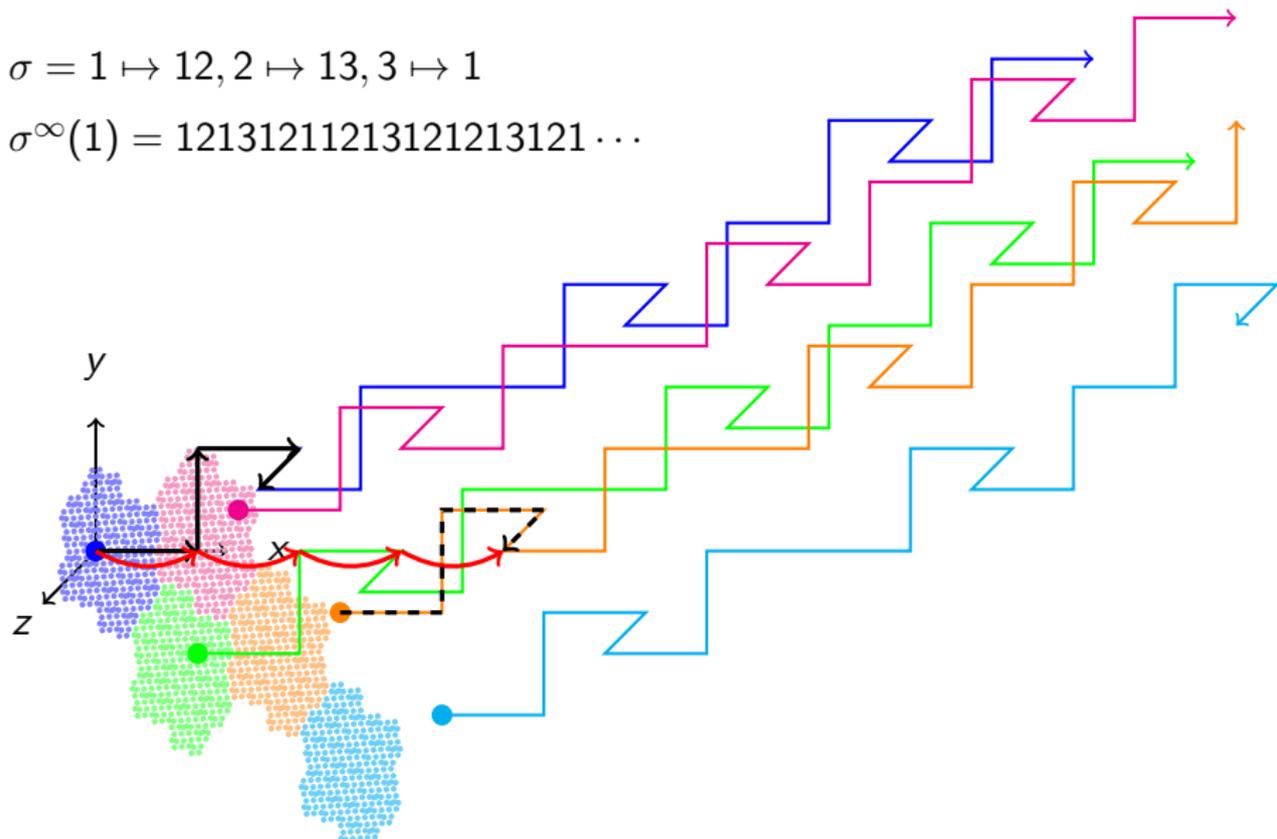
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

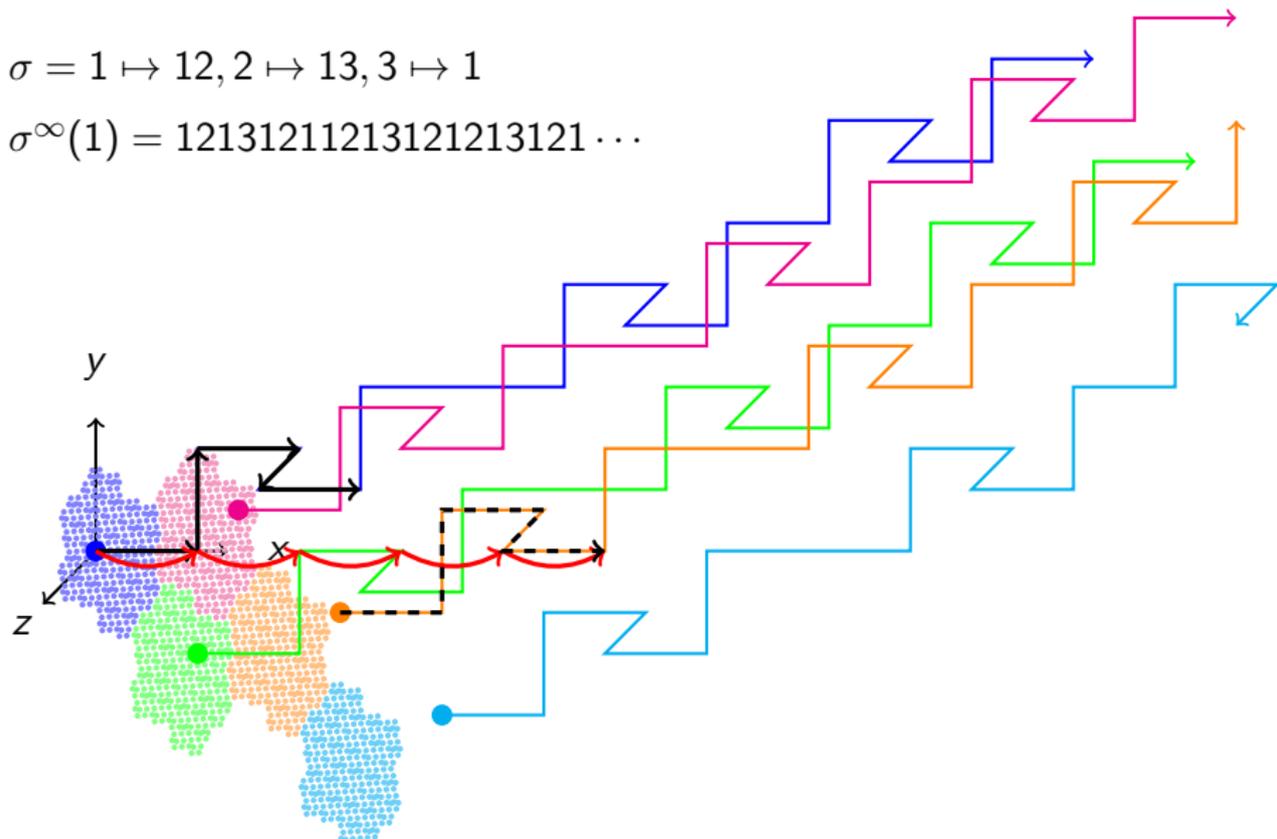
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

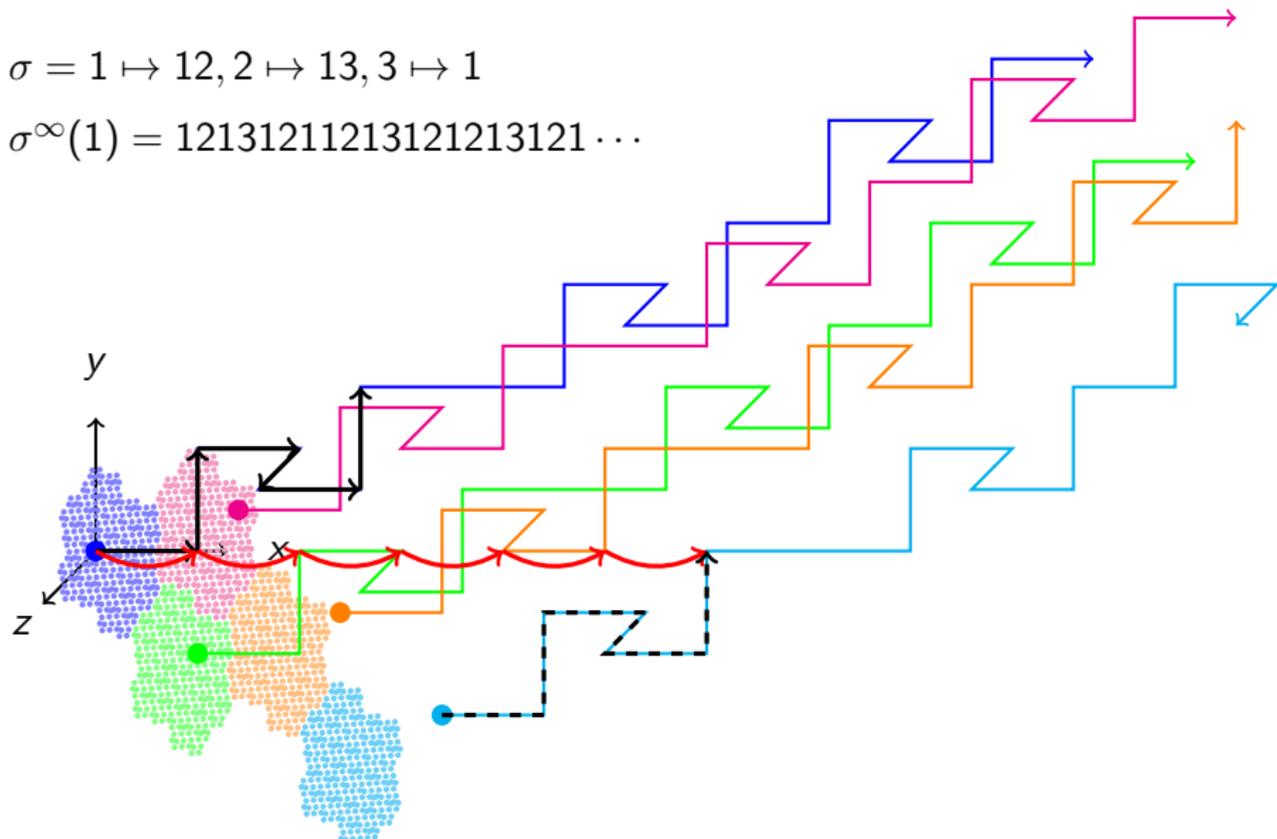
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

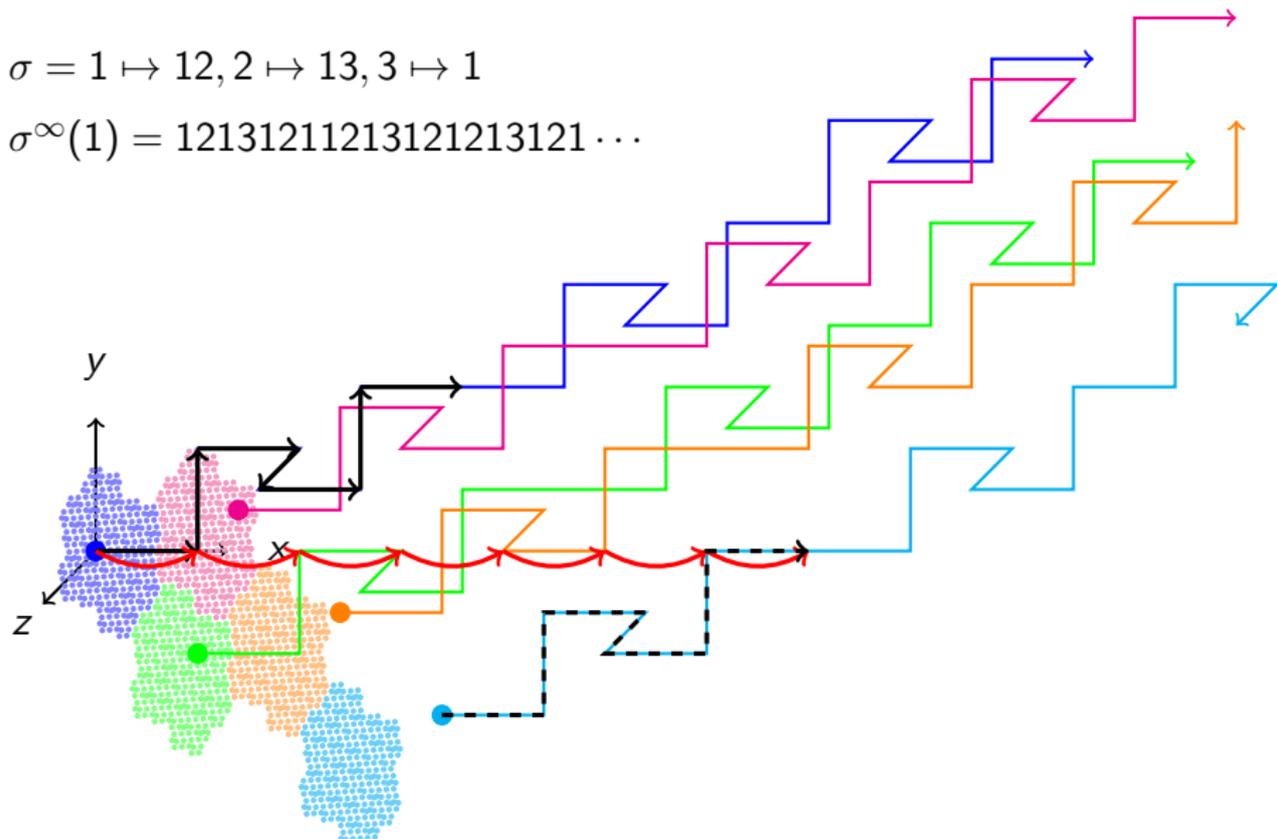
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

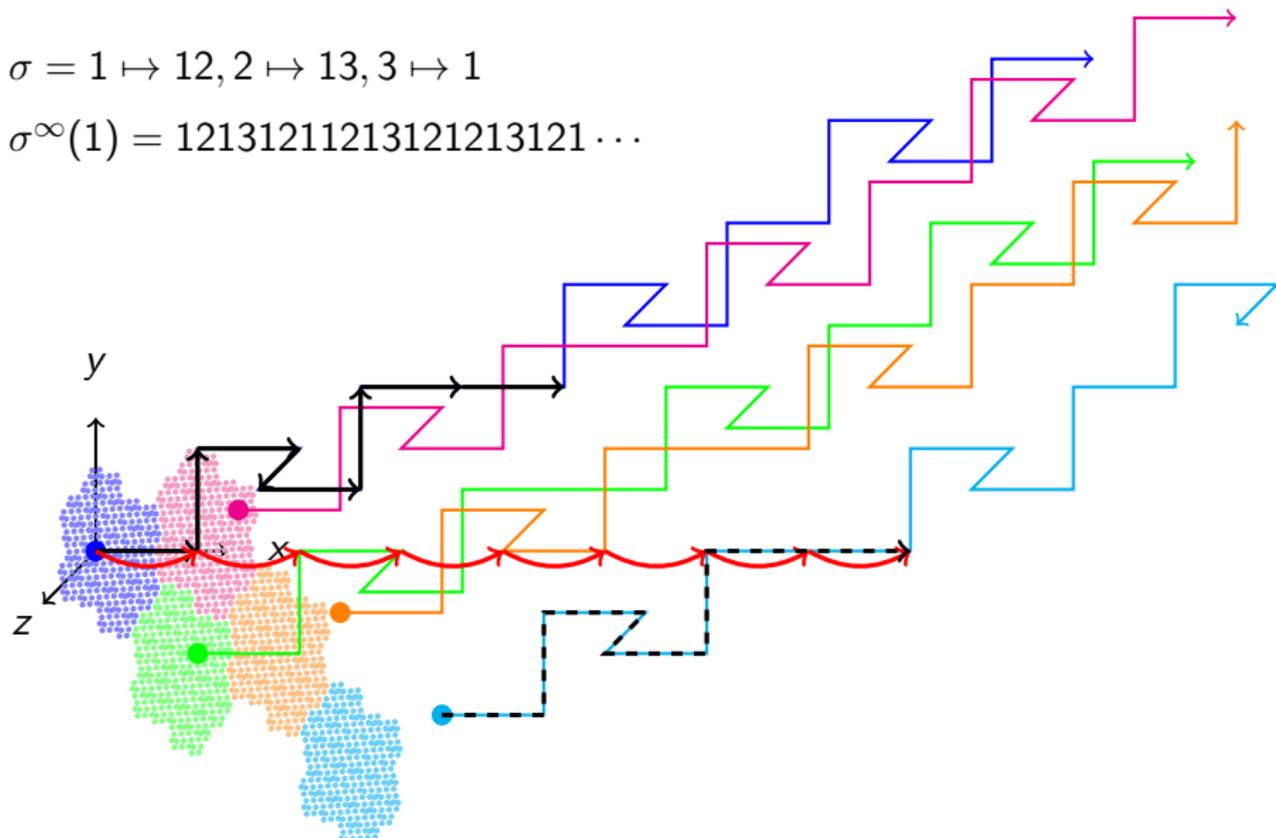
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

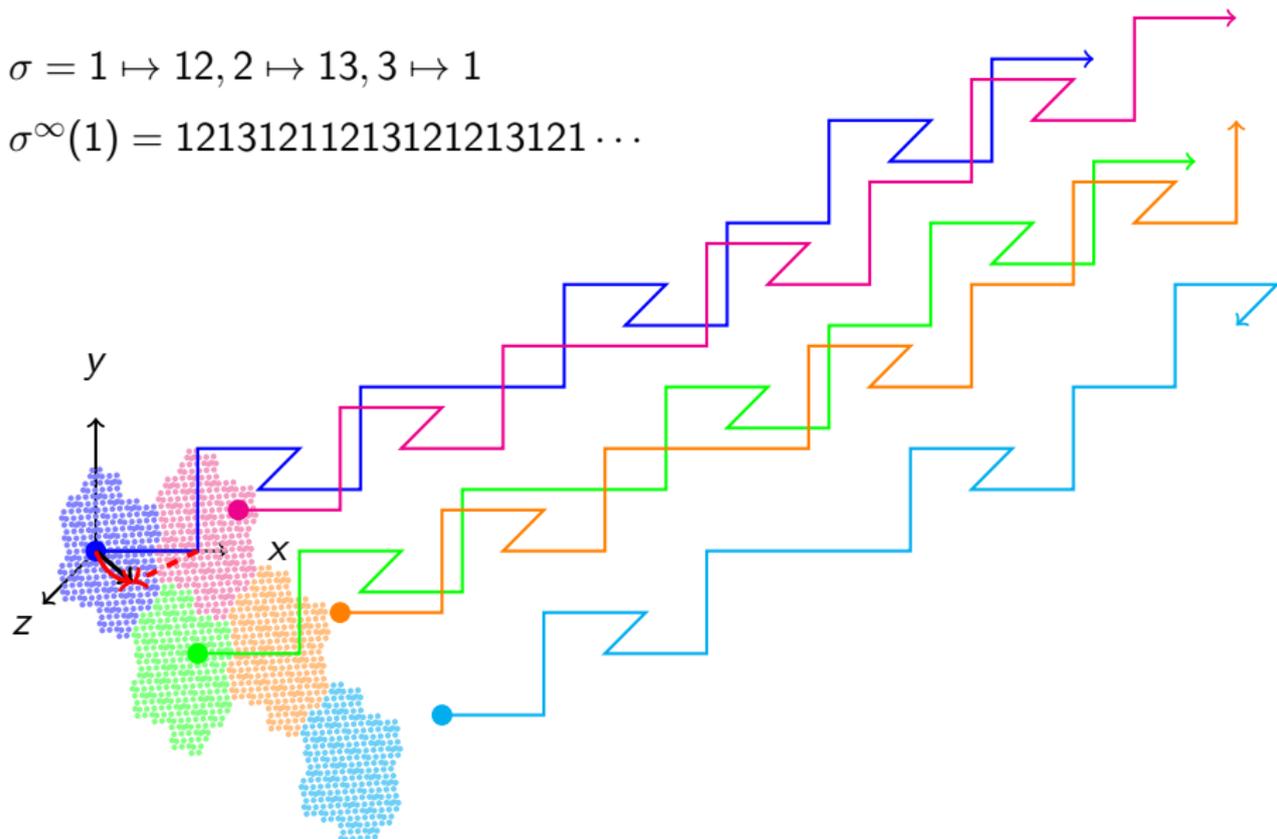
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

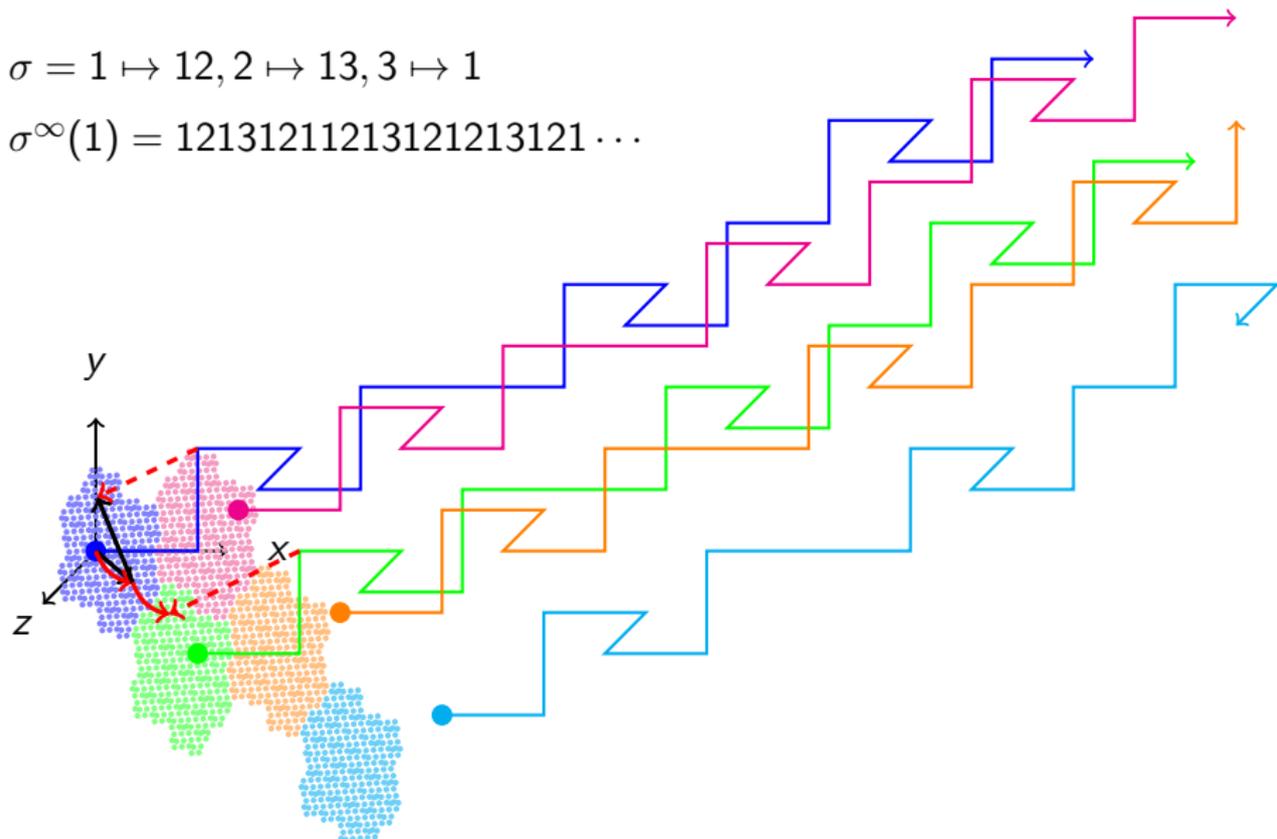
$$\sigma^\infty(1) = 12131211121312121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

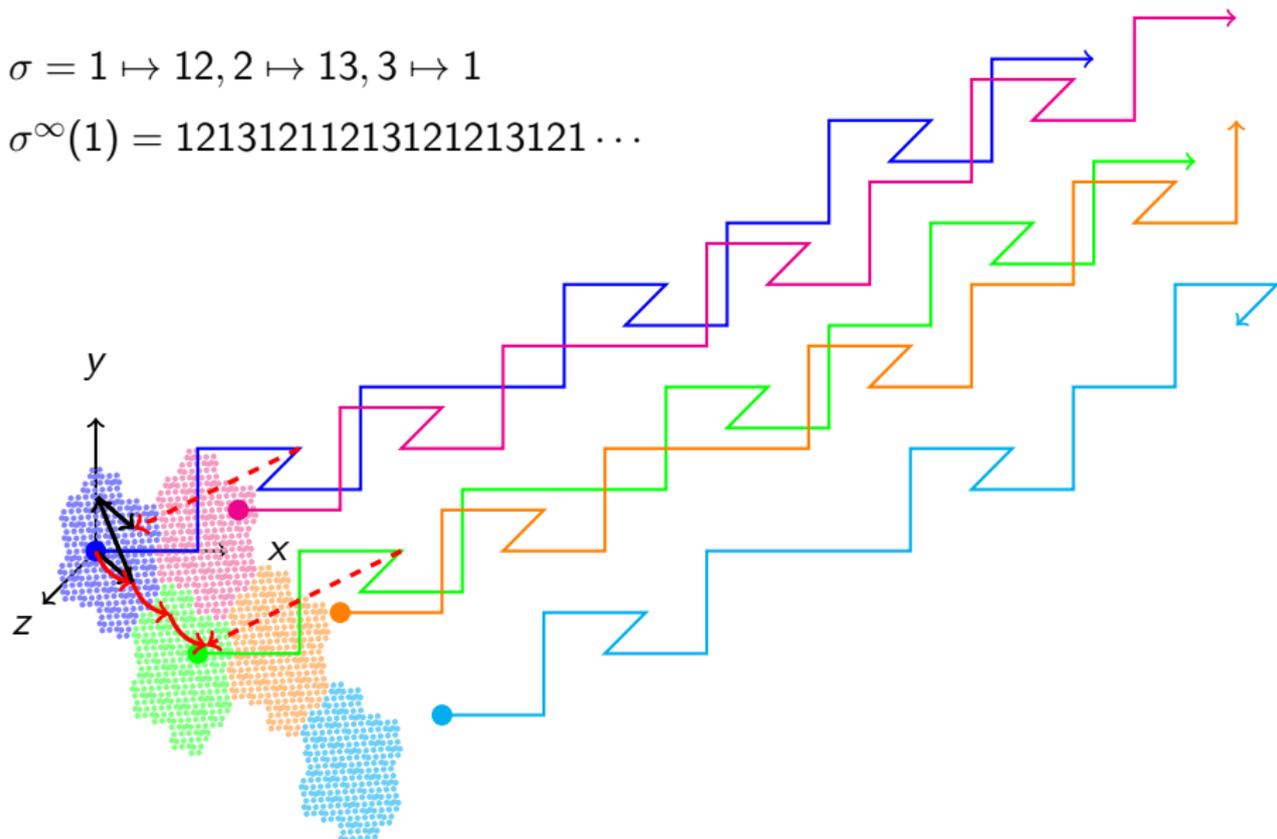
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

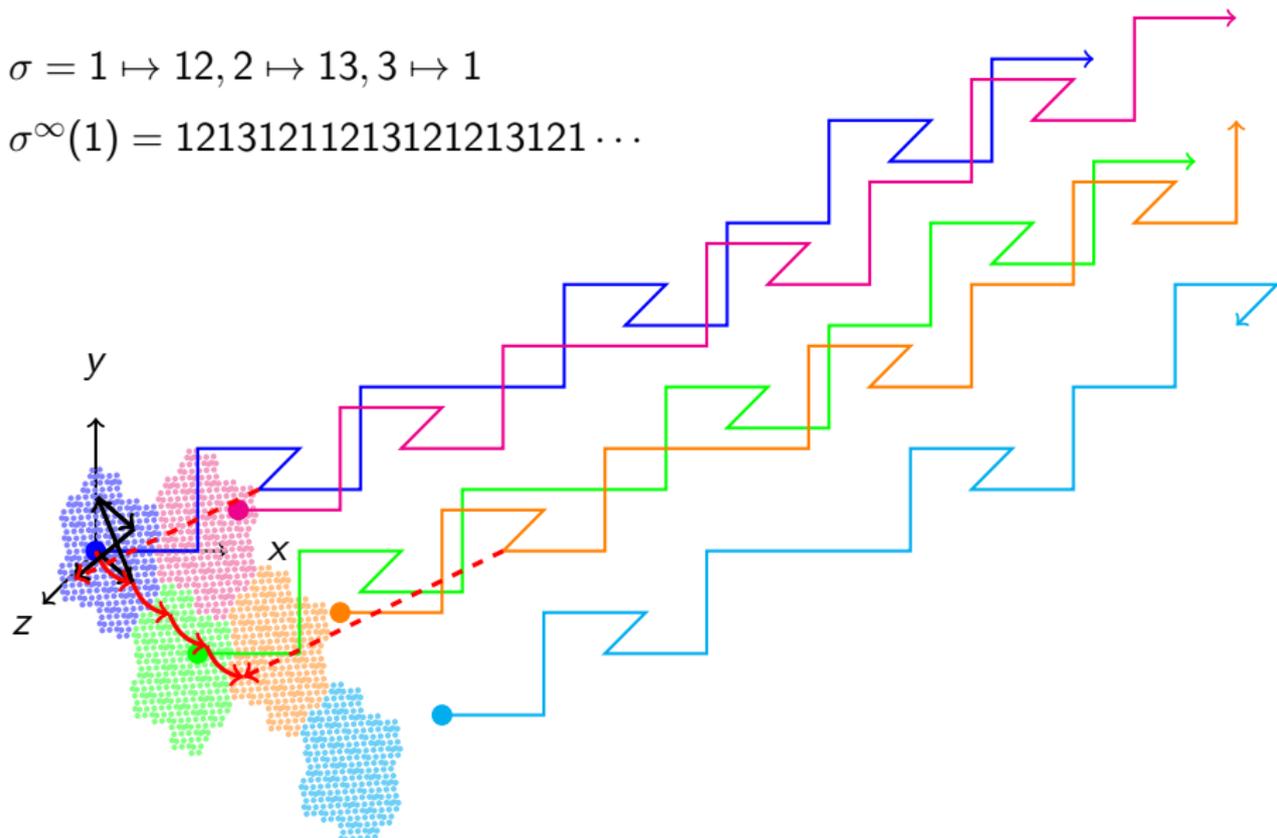
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

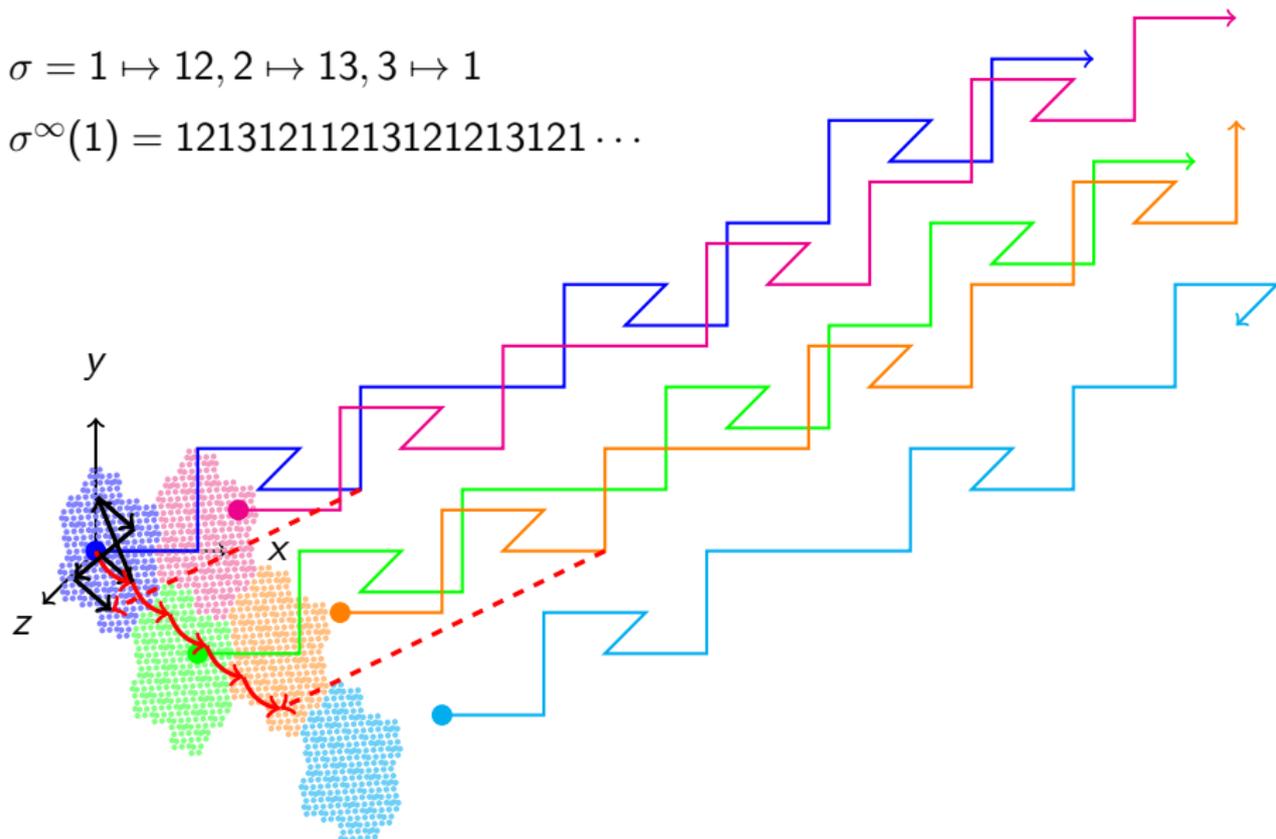
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

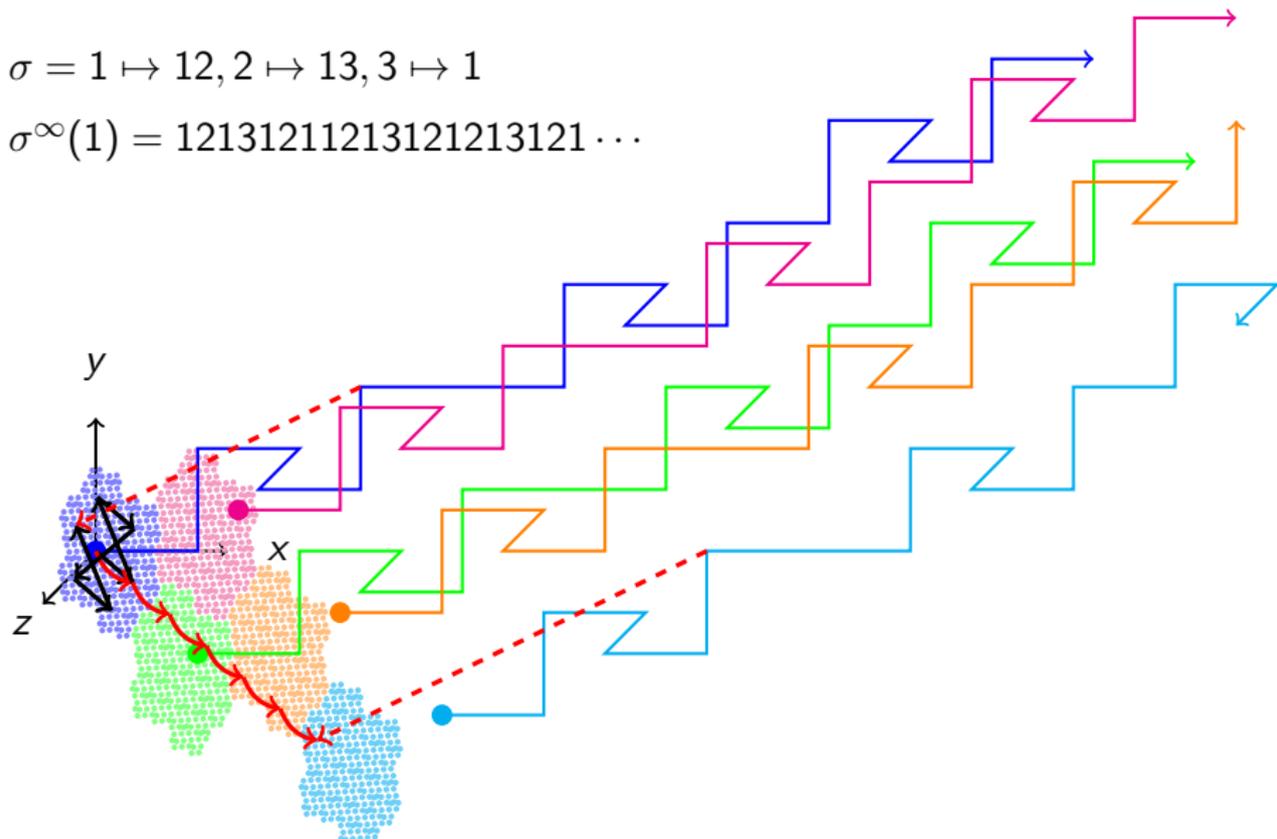
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

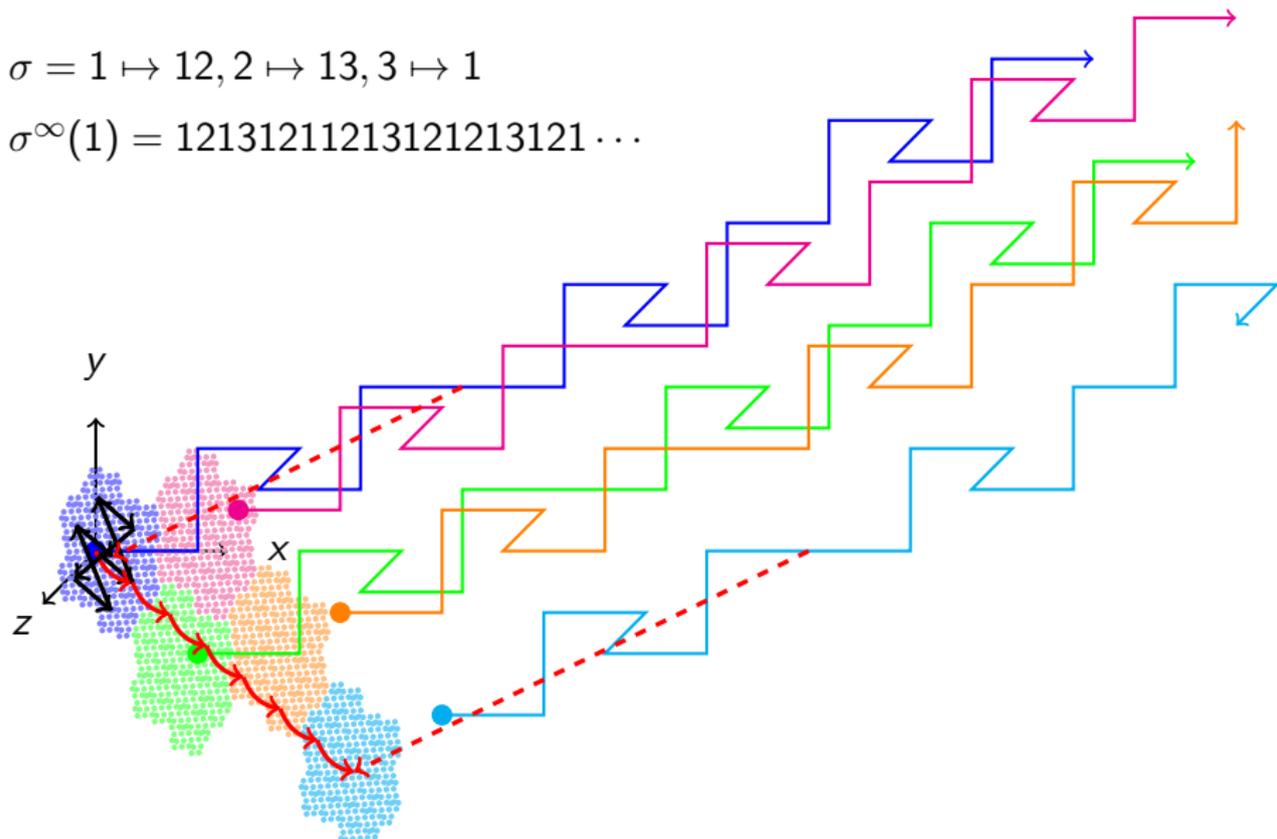
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

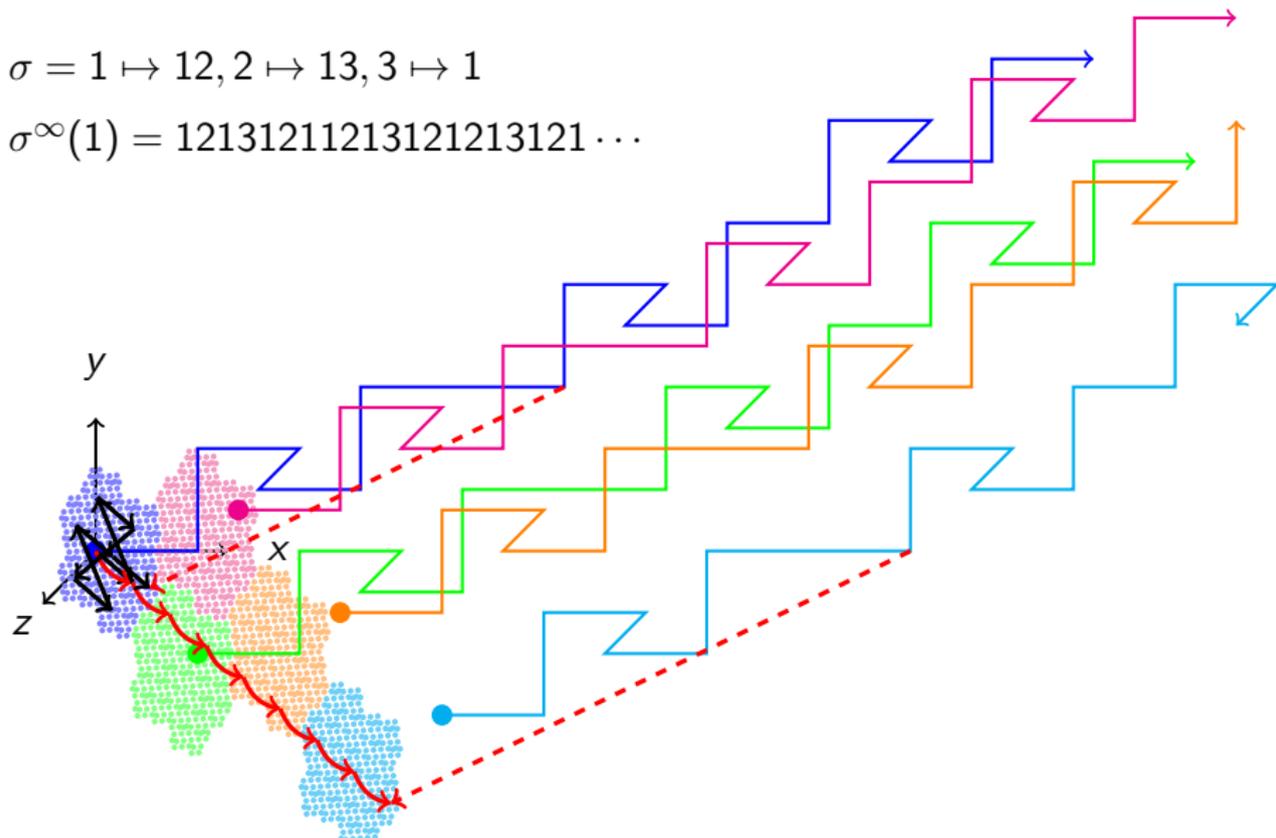
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

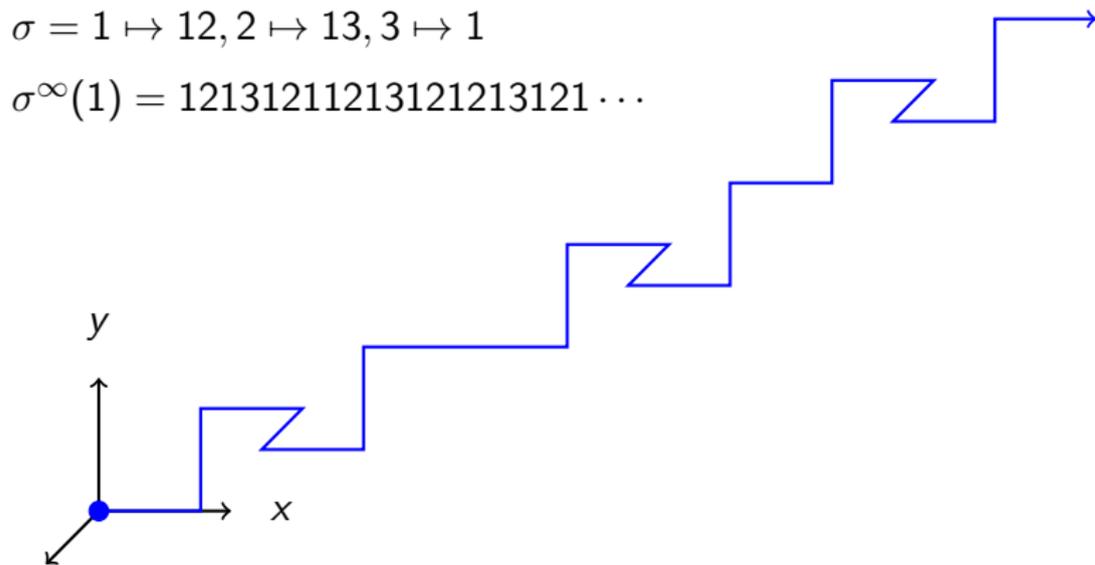
$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



# L'exemple Tribonacci, Rauzy (1982)

$$\sigma = 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$$

$$\sigma^\infty(1) = 121312111213121213121 \dots$$



Or, cette droite possède exactement  $2n + 1$  facteurs de longueur  $n$ .

Peut-on obtenir la même chose pour toute direction 3D et comment ?

## 2D : l'algorithme d'Euclide sur (11, 4)

$$\begin{array}{l} 11 = 2 \cdot 4 + 3 \\ 4 = 1 \cdot 3 + 1 \\ 3 = 3 \cdot 1 + 0 \end{array}$$

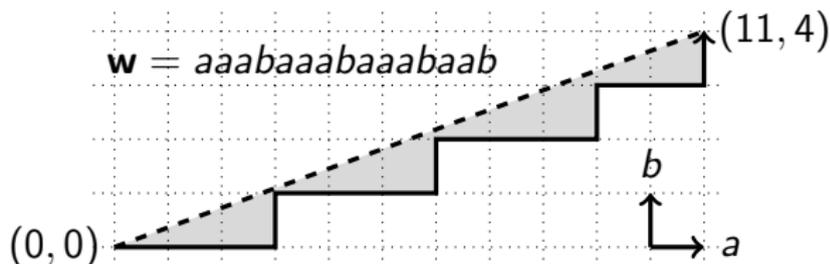
$$\frac{4}{11} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (11, 4) & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2} & (3, 4) & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} & (3, 1) & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3} & (0, 1) \\ a \mapsto a & & a \mapsto ab & & a \mapsto a & & \\ b \mapsto aab & & b \mapsto b & & b \mapsto aaab & & \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_1 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_2 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_3 = b \end{array}$$

# 2D : l'algorithme d'Euclide sur (11, 4)

$$\begin{array}{l} 11 = 2 \cdot 4 + 3 \\ 4 = 1 \cdot 3 + 1 \\ 3 = 3 \cdot 1 + 0 \end{array}$$

$$\frac{4}{11} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$



$$\begin{array}{ccccccc} (11,4) & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2} & (3,4) & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} & (3,1) & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3} & (0,1) \\ a \mapsto a & & a \mapsto ab & & a \mapsto a & & \\ b \mapsto aab & & b \mapsto b & & b \mapsto aaab & & \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_1 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_2 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_3 = b \end{array}$$

# 3D : l'algorithme d'Euclide généralisé sur (7, 4, 6)

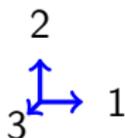
$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & \\
 (7, 4, 6) \longleftarrow & (1, 4, 6) \longleftarrow & (1, 4, 2) \longleftarrow & (1, 0, 2) \longleftarrow & & & (1, 0, 0) \\
 1 \mapsto 1 & 1 \mapsto 1 & 1 \mapsto 1 & 1 \mapsto 133 & & & \\
 2 \mapsto 2 & 2 \mapsto 23 & 2 \mapsto 2 & 2 \mapsto 2 & & & \\
 3 \mapsto 13 & 3 \mapsto 3 & 3 \mapsto 223 & 3 \mapsto 3 & & & \\
 \mathbf{w}_0 \longleftarrow & \mathbf{w}_1 \longleftarrow & \mathbf{w}_2 \longleftarrow & \mathbf{w}_3 \longleftarrow & & & \mathbf{w}_4
 \end{array}$$

Its (Hausdorff) distance to the euclidean line is 1.3680.

# 3D : l'algorithme d'Euclide généralisé sur (7, 4, 6)

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 (7, 4, 6) \longleftarrow (1, 4, 6) \longleftarrow (1, 4, 2) \longleftarrow (1, 0, 2) \longleftarrow (1, 0, 0) \\
 \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 13 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 23 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 223 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 133 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} \\
 \mathbf{w}_0 \longleftarrow \mathbf{w}_1 \longleftarrow \mathbf{w}_2 \longleftarrow \mathbf{w}_3 \longleftarrow \mathbf{w}_4
 \end{array}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 = 12132131321321313$$

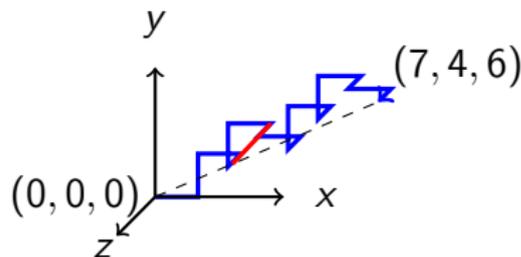
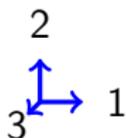


Its (Hausdorff) distance to the euclidean line is 1.3680.

# 3D : l'algorithme d'Euclide généralisé sur (7, 4, 6)

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 (7, 4, 6) \longleftarrow (1, 4, 6) \longleftarrow (1, 4, 2) \longleftarrow (1, 0, 2) \longleftarrow (1, 0, 0) \\
 \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 13 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 23 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 223 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 133 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} \\
 \mathbf{w}_0 \longleftarrow \mathbf{w}_1 \longleftarrow \mathbf{w}_2 \longleftarrow \mathbf{w}_3 \longleftarrow \mathbf{w}_4
 \end{array}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 = 12132131321321313$$



Its (Hausdorff) distance to the euclidean line is 1.3680.

# Algorithmes de fractions continues généralisées

Algorithme de **Brun** : soustraire la valeur médiane de la plus grande :

$$(7, 4, 6) \rightarrow (1, 4, 6) \rightarrow (1, 4, 2) \rightarrow (1, 2, 2) \rightarrow (1, 0, 2) \rightarrow (1, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1).$$

Algorithme de **Selmer** : soustraire la plus petite de la plus grande :

$$(7, 4, 6) \rightarrow (3, 4, 6) \rightarrow (3, 4, 3) \rightarrow (3, 1, 3) \rightarrow (2, 1, 3) \rightarrow (2, 1, 2) \rightarrow (1, 1, 2) \\ \rightarrow (1, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1)$$

Algorithme de **Poincaré** : soustraire la plus petite valeur de la médiane et soustraire la valeur médiane de la plus grande :

$$(7, 4, 6) \rightarrow (1, 4, 2) \rightarrow (1, 2, 1) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0)$$

Algorithme de **Arnoux-Rauzy** : soustraire les deux plus petites valeurs de la plus grande :

$$(7, 4, 6) \rightarrow \text{Impossible}$$

Algorithme **Fully subtractive** : soustraire la plus petite valeur des deux autres :

$$(7, 4, 6) \rightarrow (3, 4, 2) \rightarrow (1, 2, 2) \rightarrow (1, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 0)$$

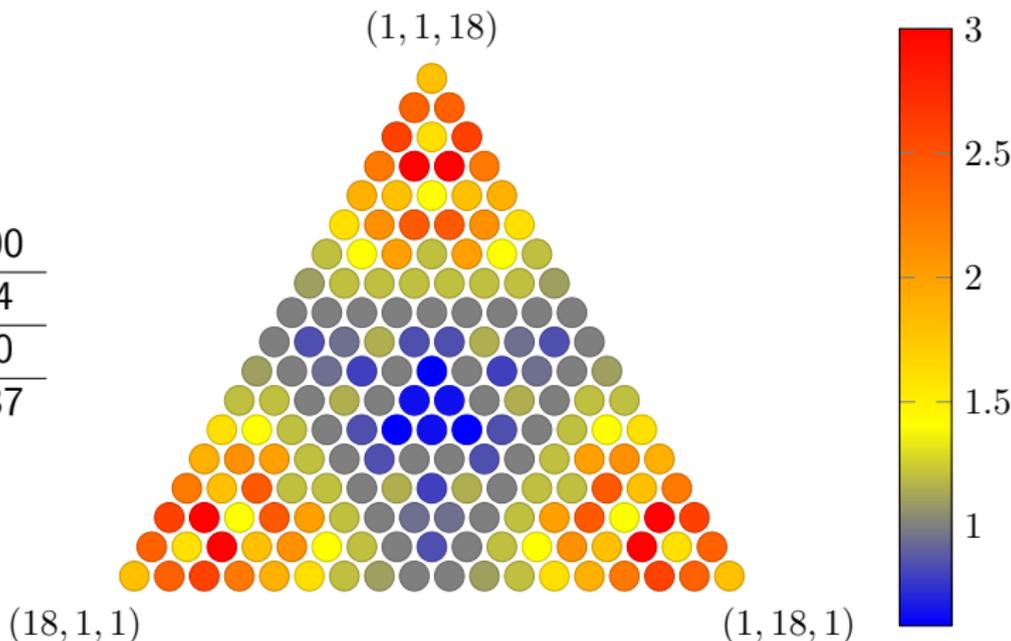
## Définition

Soit  $C$  un chemin discret définissant une suite  $(P_k)_{0 \leq k < n}$  de points  $P_k = (x_k, y_k, z_k)$  de  $\mathbb{Z}^3$  telle que  $P_0 = (0, 0, 0)$  et  $P_{n-1} = (a, b, c)$ . On définit la **discrépance** du chemin comme la valeur

$$\max_{0 \leq k < n} \left\{ \left| \frac{a}{a+b+c} k - x_k \right|, \left| \frac{b}{a+b+c} k - y_k \right|, \left| \frac{c}{a+b+c} k - z_k \right| \right\}.$$

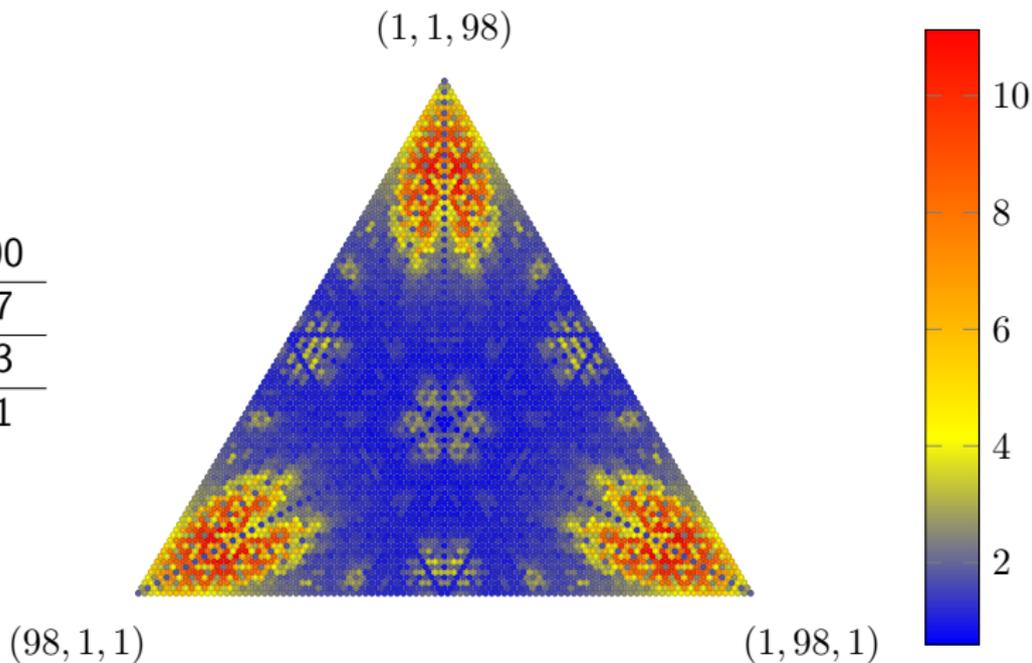
Discrédance pour les triplets d'entiers strictement positifs  $(a_1, a_2, a_3)$  tels que  $a_1 + a_2 + a_3 = N$  et  $N = 20$  pour l'algorithme **Poincaré**.

min	0.6000
moy.	1.484
max	3.000
E.T.	0.6137



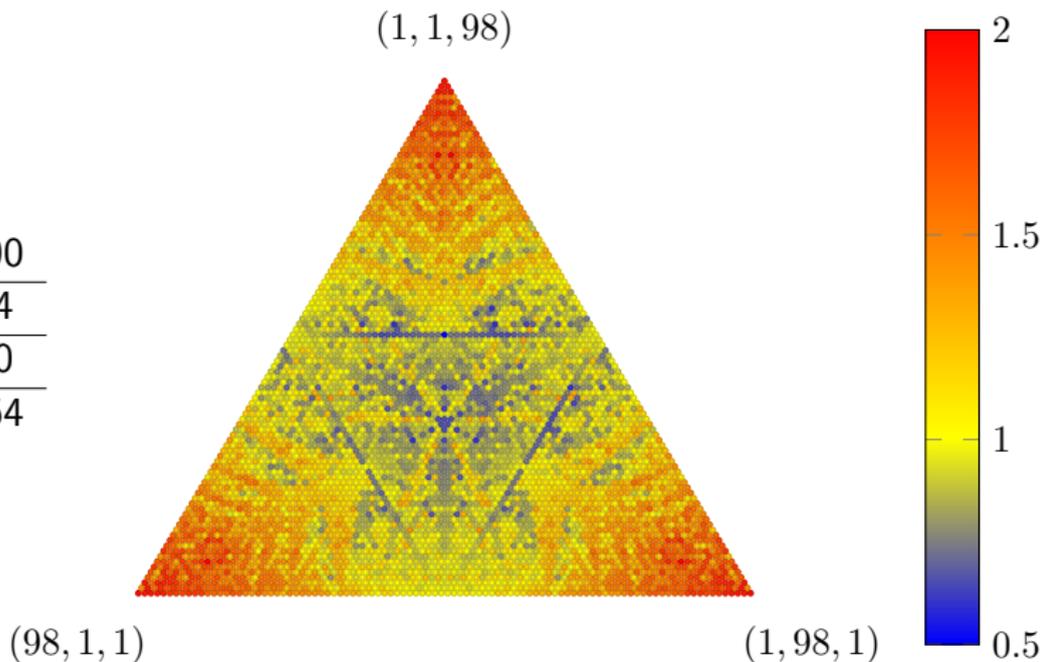
Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs  $(a_1, a_2, a_3)$  tels que  $a_1 + a_2 + a_3 = N$  et  $N = 100$  pour l'algorithme **Poincaré**.

min	0.6000
moy.	2.527
max	11.13
E.T.	2.261



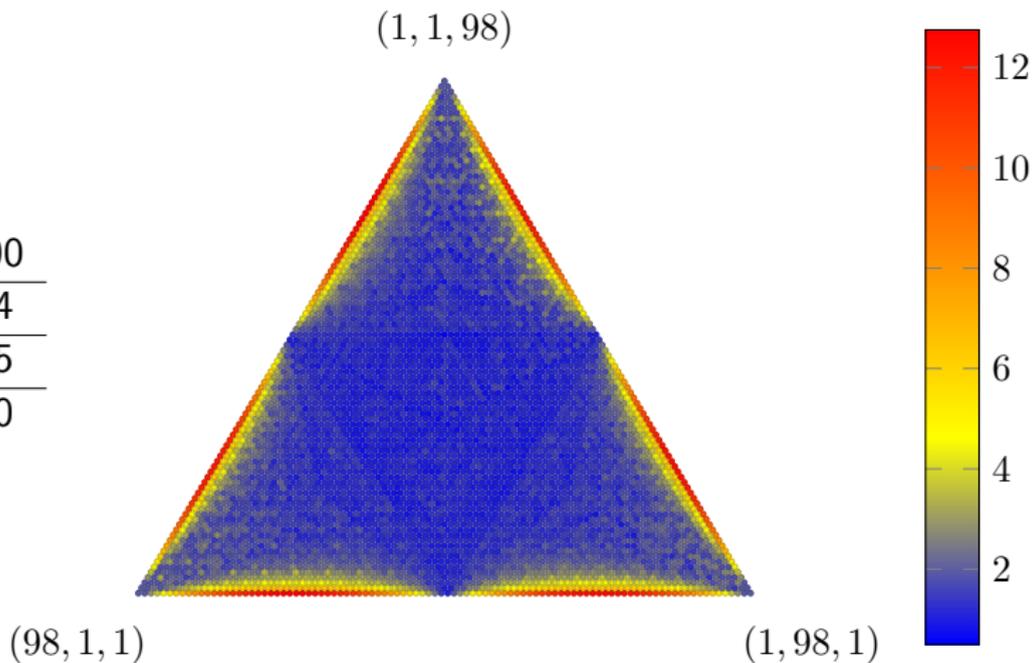
Discrédance pour les triplets d'entiers strictement positifs  $(a_1, a_2, a_3)$  tels que  $a_1 + a_2 + a_3 = N$  et  $N = 100$  pour l'algorithme **Brun**.

min	0.5000
moy.	1.114
max	2.000
E.T.	0.2664



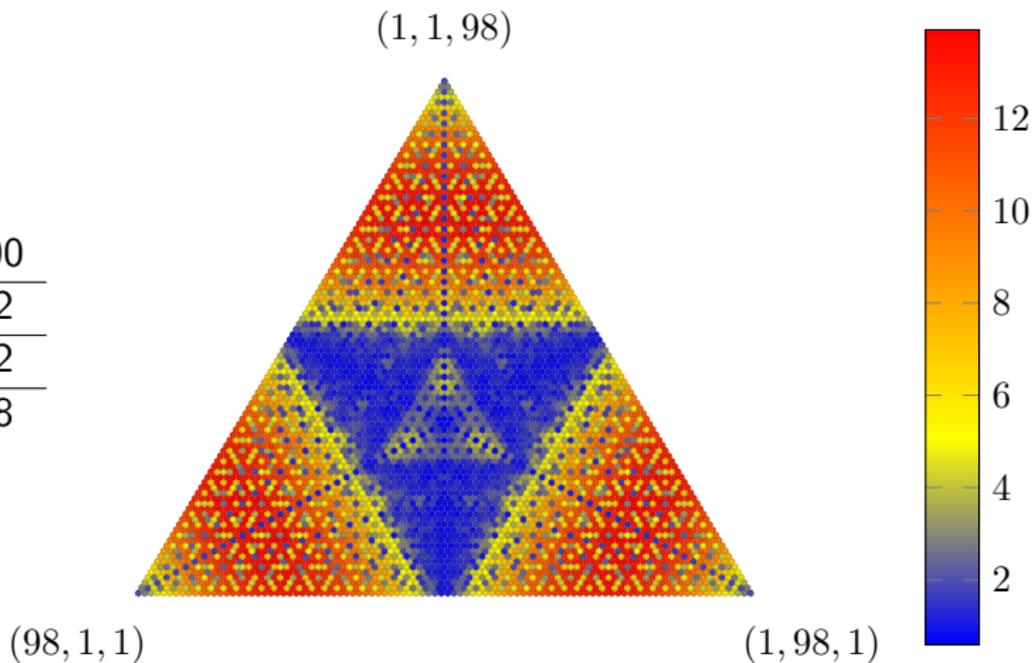
Discrédance pour les triplets d'entiers strictement positifs  $(a_1, a_2, a_3)$  tels que  $a_1 + a_2 + a_3 = N$  et  $N = 100$  pour l'algorithme **Selmer**.

min	0.5000
moy.	2.184
max	12.75
E.T.	2.070



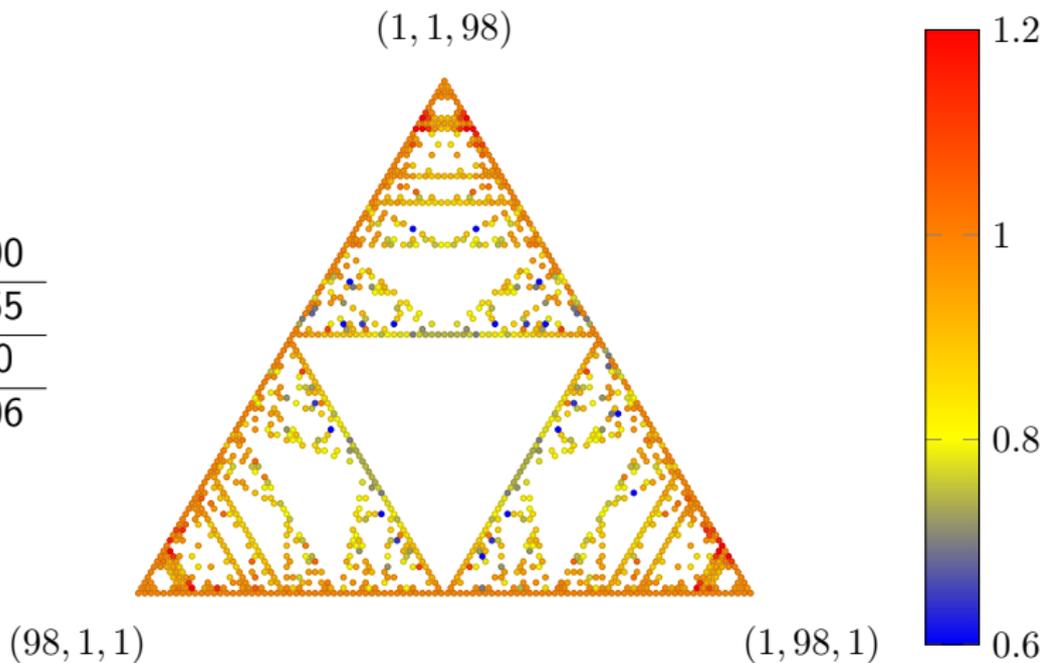
Discrédance pour les triplets d'entiers strictement positifs  $(a_1, a_2, a_3)$  tels que  $a_1 + a_2 + a_3 = N$  et  $N = 100$  pour l'algorithme **Fully subtractive**.

min	0.6000
moy.	5.982
max	13.92
E.T.	4.388



Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs  $(a_1, a_2, a_3)$  tels que  $a_1 + a_2 + a_3 = N$  et  $N = 100$  pour l'algorithme **Arnoux-Rauzy**.

min	0.6000
moy.	0.9055
max	1.200
E.T.	0.1006



## 3D Continued fraction algorithms : fusions

**Arnoux-Rauzy and Selmer** Do Arnoux-Rauzy if possible, otherwise Selmer.

**Arnoux-Rauzy and Fully** Do Arnoux-Rauzy if possible, otherwise Fully subtractive.

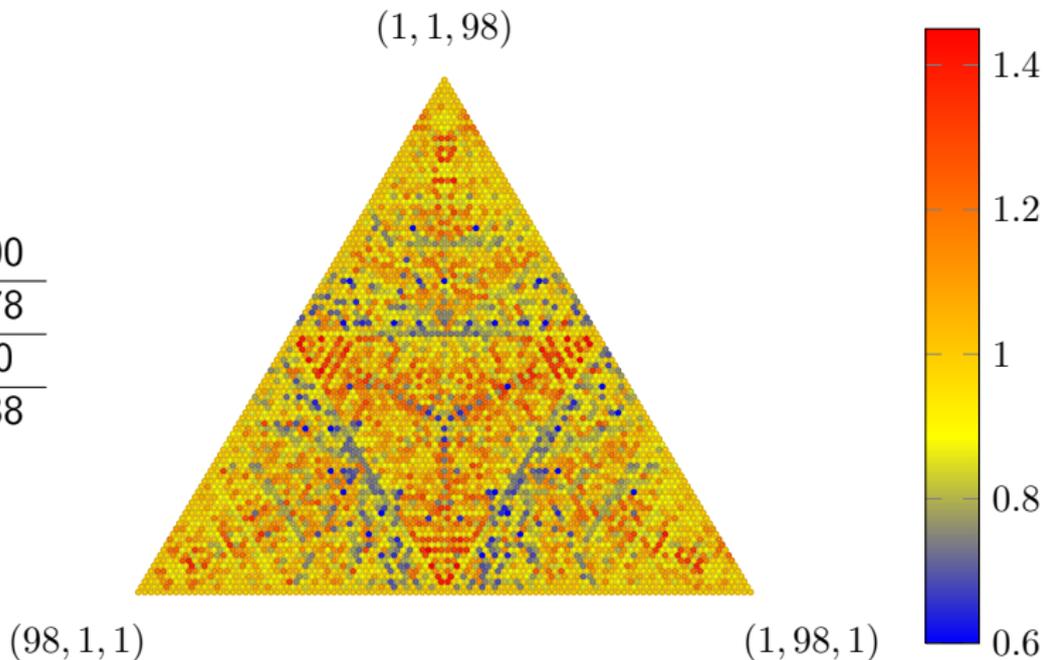
**Arnoux-Rauzy and Brun** Do Arnoux-Rauzy if possible, otherwise Brun.

**Arnoux-Rauzy and Poincaré** Do Arnoux-Rauzy if possible, otherwise Poincaré.

Discrédance pour les triplets d'entiers strictement positifs  $(a_1, a_2, a_3)$  tels que  $a_1 + a_2 + a_3 = N$  et  $N = 100$  pour l'algorithme

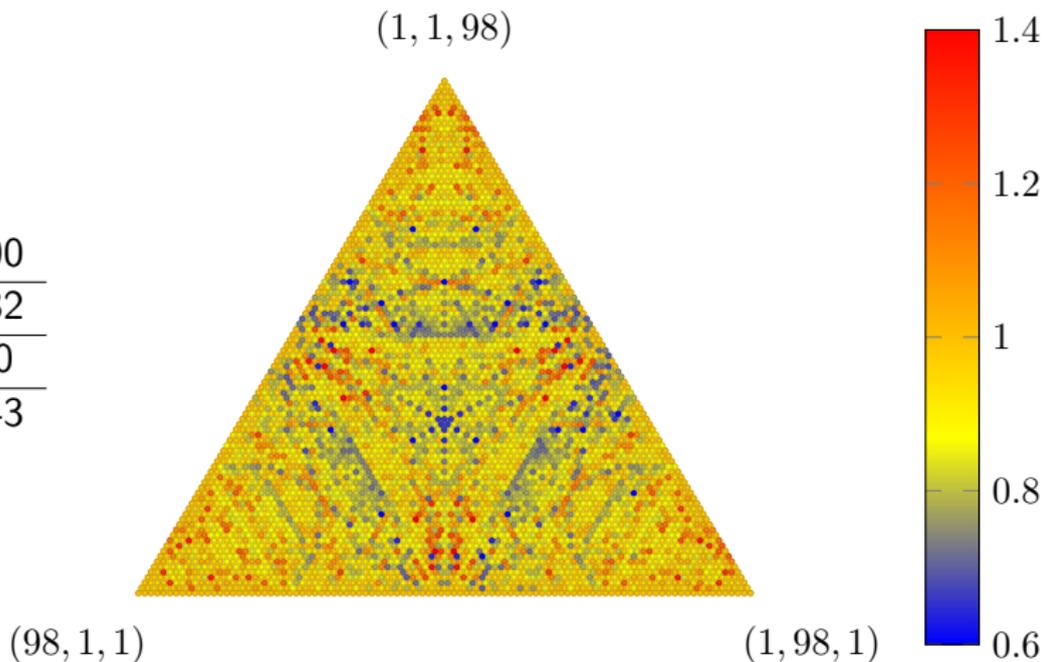
**Arnoux-Rauzy-Selmer.**

min	0.6000
moy.	0.9678
max	1.450
E.T.	0.1438



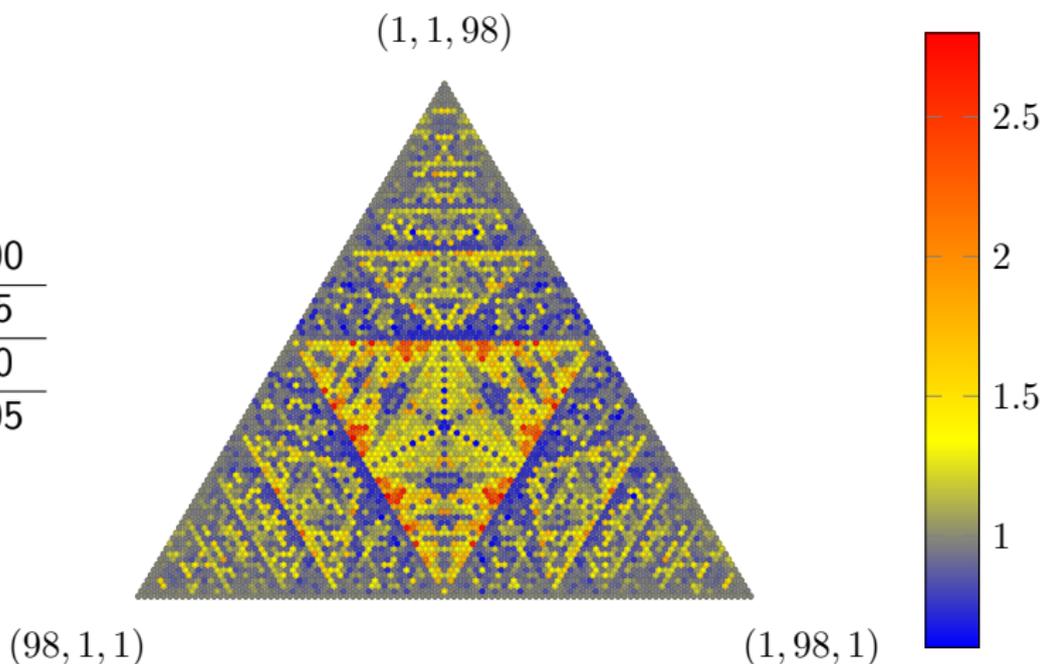
Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs  $(a_1, a_2, a_3)$  tels que  $a_1 + a_2 + a_3 = N$  et  $N = 100$  pour l'algorithme **Arnoux-Rauzy-Brun**.

min	0.6000
moy.	0.9132
max	1.400
E.T.	0.1143



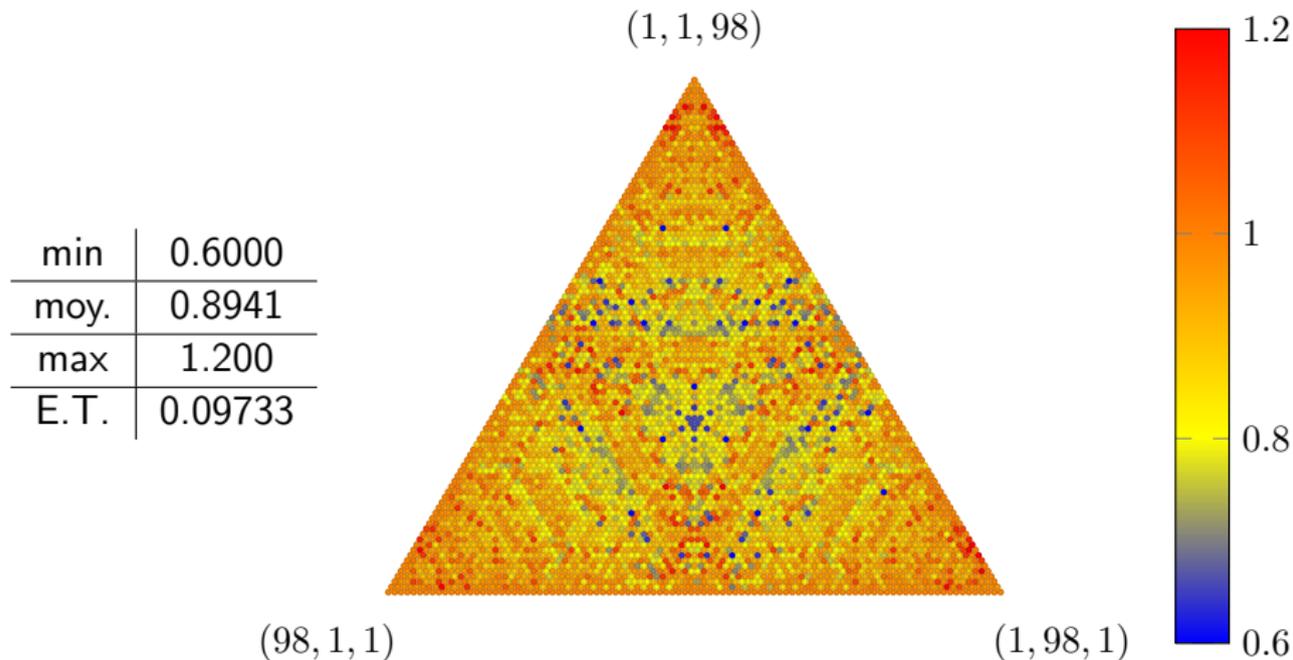
Discrédance pour les triplets d'entiers strictement positifs  $(a_1, a_2, a_3)$  tels que  $a_1 + a_2 + a_3 = N$  et  $N = 100$  pour l'algorithme **Arnoux-Rauzy-Fully subtractive**.

min	0.6000
moy.	1.095
max	2.800
E.T.	0.3105



Discrédance pour les triplets d'entiers strictement positifs  $(a_1, a_2, a_3)$  tels que  $a_1 + a_2 + a_3 = N$  et  $N = 100$  pour l'algorithme

**Arnoux-Rauzy-Poincaré.**



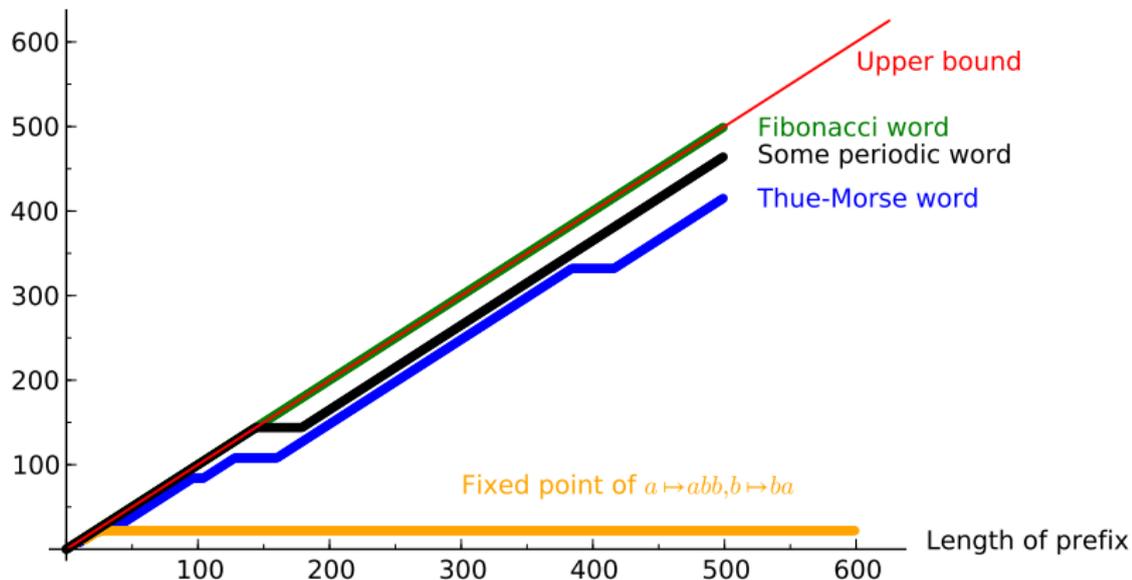
# Problèmes ouverts (pavages)

Some problems are left open :

- Find an algorithm that **decides** whether a polyomino is **prime**.
- If  $\alpha\alpha$  appears in the boundary word of a double square tile  $D$ , where  $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ , then  $D$  is **not prime**.
- Prove that if  $S \circ P$  is a **square tile**, then so is  $P$ .
- Describe the **distribution** and the **proportion** of prime square tiles of half-perimeter  $n$  as  $n$  goes to infinity.
- Show that SHRINK $_i$  and SWAP $_i$  are **sufficient to reduce a double square tile** : no need to use the more complicated L-SHRINK $_i$  and R-SHRINK $_i$  defined for limit cases.
- Extend the results to **8-connected polyominoes**.
- Extend the results to **continuous paths and tiles**.

# Quatre classes de complexité palindromique

Number of palindrome factors



# The Thue-Morse word palindrome complexity class

The 12381 primitive morphisms  $\varphi$  on  $\{a, b\}^*$  prolongable on  $a$  such that  $|\varphi(ab)| \leq 11$  group as follows :

$ \text{Pal}(\mathbf{w}) $	$D(\mathbf{w})$	First 12381 primitive morphisms
$\infty$	0	2649 (21%)
$\infty$	$0 < D(\mathbf{w}) < \infty$	0
$\infty$	$\infty$	58 (0.5%)
finite	$\infty$	9674 (78%)

Conjecture (Blondin Massé, Brlek, Garon, L., 2008)

Soit  $\mathbf{w}$  un *point fixe*  $\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{w})$  d'une substitution *primitive*  $\varphi$ . Si le défaut est tel que  $0 < D(\mathbf{w}) < \infty$ , alors  $\mathbf{w}$  est *périodique*.

# The Thue-Morse word palindrome complexity class

The 12381 primitive morphisms  $\varphi$  on  $\{a, b\}^*$  prolongable on  $a$  such that  $|\varphi(ab)| \leq 11$  group as follows :

$ \text{Pal}(\mathbf{w}) $	$D(\mathbf{w})$	First 12381 primitive morphisms
$\infty$	0	2649 (21%)
$\infty$	$0 < D(\mathbf{w}) < \infty$	0
$\infty$	$\infty$	58 (0.5%)
finite	$\infty$	9674 (78%)

Conjecture (Blondin Massé, Brlek, Garon, L., 2008)

Soit  $\mathbf{w}$  un *point fixe*  $\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{w})$  d'une substitution *primitive*  $\varphi$ . Si le défaut est tel que  $0 < D(\mathbf{w}) < \infty$ , alors  $\mathbf{w}$  est *périodique*.

Can we characterize the Thue-Morse word palindrome complexity class ?

# Open problems (palindrome complexity)

Below are the primitive morphisms  $\varphi$  on  $\{a, b\}^*$  prolongable on  $a$  such that  $|\varphi(ab)| \leq 10$  that generates a fixed point in the Thue-Morse palindrome complexity class :

$a \mapsto ab, b \mapsto ba$	$a \mapsto aababa, b \mapsto abb$	$a \mapsto aabbabba, b \mapsto ab$
	$a \mapsto aabbaa, b \mapsto bab$	$a \mapsto abbabbaa, b \mapsto ba$
	$a \mapsto ababaa, b \mapsto bba$	$a \mapsto aabbbaa, b \mapsto bab$
$a \mapsto abbaab, b \mapsto ba$	$a \mapsto abbabb, b \mapsto bba$	$a \mapsto aababa, b \mapsto abbb$
$a \mapsto aabb, b \mapsto bbaa$	$a \mapsto abbba, b \mapsto baab$	$a \mapsto ababaa, b \mapsto bbba$
$a \mapsto abab, b \mapsto baba$	$a \mapsto abba, b \mapsto baaab$	$a \mapsto abbbba, b \mapsto baab$
$a \mapsto abba, b \mapsto baab$	$a \mapsto aab, b \mapsto baabaa$	$a \mapsto abbba, b \mapsto baaab$
$a \mapsto ab, b \mapsto baabba$	$a \mapsto aab, b \mapsto bababb$	$a \mapsto aaab, b \mapsto bababb$
	$a \mapsto aba, b \mapsto bbaabb$	$a \mapsto abba, b \mapsto baaaab$
	$a \mapsto abb, b \mapsto aababa$	$a \mapsto abbb, b \mapsto aababa$
		$a \mapsto aba, b \mapsto bbaaabb$
		$a \mapsto ab, b \mapsto aabbabba$
		$a \mapsto ab, b \mapsto baabaabb$

- Transformer cette conjecture en théorème :

## Conjecture

*Soit  $w$  un mot fini engendré par un nombre fini de substitutions en suivant l'algorithme d'**Arnoux-Rauzy-Poincaré**. Alors, la complexité en facteurs du mot  $w$  est *bornée par  $3n$* .*

- Étudier la valeur d'équilibre des mots engendrés par l'algorithme **Arnoux-Rauzy-Poincaré**.

## Question

En considérant l'algorithme d'**Arnoux-Rauzy-Poincaré** sur un vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , peut-on démontrer que les vecteurs colonnes de la matrice produit  $M_1 M_2 \cdots M_N$  tendent tous vers le vecteur  $\mathbf{u}$  ?

## Question

Est-ce que l'algorithme renormalisé  $\bar{T}_{ARP} : \Delta_2 \rightarrow \Delta_2$  est **ergodique** ?

## Question

Calculer, si elle existe, la **mesure invariante** associée à l'algorithme renormalisé  $\bar{T}_{ARP} : \Delta_2 \rightarrow \Delta_2$ .

- This research was driven by computer exploration using the open-source mathematical software `Sage`.
- Les images de ce document ont été produites à l'aide de `pgf/tikz`.

Fin