

§1. Problème de couverture exacte

Soit U un ensemble, appelé univers. Soit $S = (A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de sous-ensemble de U .

Def. Une couverture exacte de U est une sous-famille S^* de S tel que chaque élément de U appartient à exactement une sous-ensemble de S^* .

Exemple. $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S = \{A, B, C, D, E, F\}$ où

$$\begin{aligned} A &= \{0, 3, 6\} & B &= \{0, 3\} & C &= \{3, 4, 6\} \\ D &= \{2, 4, 5\} & E &= \{1, 2, 5, 6\} & F &= \{1, 6\} \end{aligned}$$

Couverture exacte : $S^* = \{B, D, F\}$

§2. NP-Complet

- NP: Étant donné une solution possible $\bar{S}$, on peut vérifier en temps polynomial si $\bar{S}$ est une solution.
- «Complet»: tous les problèmes NP se réduisant (en temps polynomial) au problème de couverture exacte.

§3. Représentation matricielle

Une ligne pour chaque élément de S , une colonne pour chaque élément de U .

	0	1	2	3	4	5	6	
A	1	0	0	1	0	0	1	
B	1	0	0	1	0	0	0	*
C	0	0	0	1	1	0	1	
D	0	0	1	0	1	1	0	*
E	0	1	1	0	0	1	1	
F	0	1	0	0	0	0	1	*

But: Trouver une sélection des lignes telle que chaque colonne contient exactement un 1 dans les lignes sélectionnées.

§ 4. Algorithme X (Knuth, 2000)

Entrée: A une matrice sur $\{0,1\}$.

Si A est vide, le problème est résolu.

[vide = 0×0 matrix]

~~Si A possède une colonne de zéros, alors pas de solution.~~

Sinon: choisir une colonne C (déterministiquement)

choisir une ligne l telle que $A[l, c] = 1$ (non-déterministiquement)

Inclure l dans la solution partielle.

Pour chaque j t.q. $A[l, j] = 1$:

supprimer colonne j de la matrice A

pour chaque i t.q. $A[i, j] = 1$ ~~et $A[i, j] = 1$~~ :

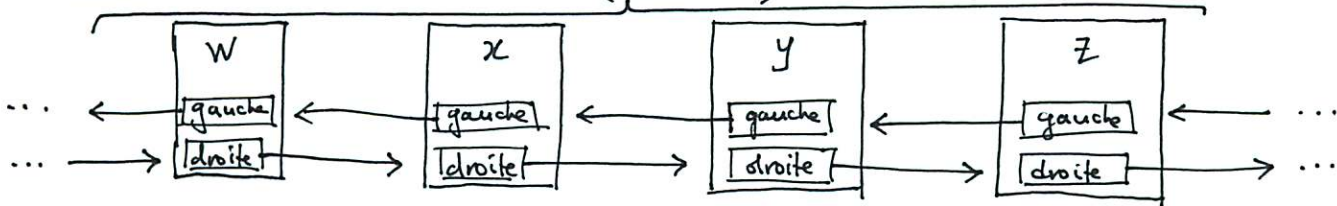
supprimer ligne i de la matrice A

Répéter l'algorithme récursivement sur la matrice réduite A .

On arrête: ~~lorsque~~ si on peut pas continuer [c'est-à-dire, on peut pas choisir une ligne l tel que $A[l, c] = 1$].

§ 5. Liens dansants

Liste doublement chaînées (éléments)



Opérations: (E) enlever X de la liste: ~~gauche, droite~~

$x.droite.gauche = x.gauche$

$x.gauche.droite = x.droite$

(* Mais on n'efface pas x de la mémoire)

(R) rajouter X dans la liste:

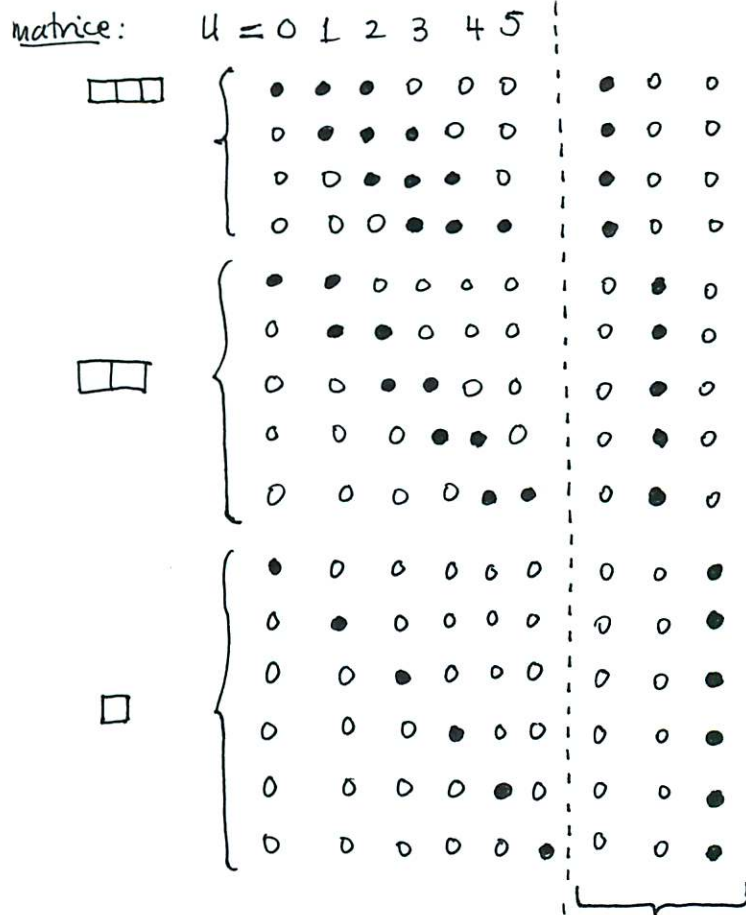
$x.droite.gauche = x$

$x.gauche.droite = x$

§ 6. Exemple de pavage

Pièces :  ,  , 

on veut paver : 



(on veut utiliser chaque pièce exactement une fois)

§ 7. QUANTUMINO!

$U = \{0, 1, 2, \dots, 15\} \cup \{16, 17, \dots, 95\}$

(16 pièce : utiliser chacune une fois) (les cellules)

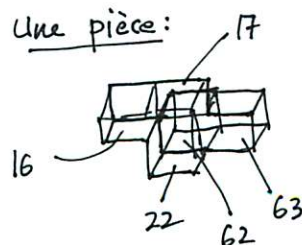
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
...				30
				40
				45
				50
				55

BAS

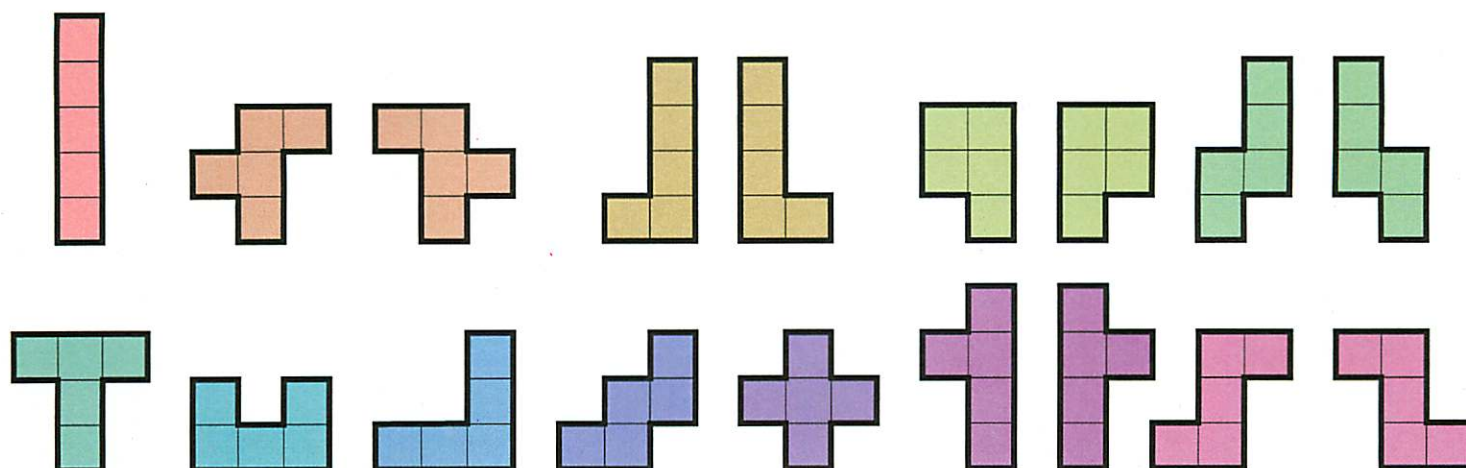
56	57	58	59	60
61	62	63	...	

HAUT

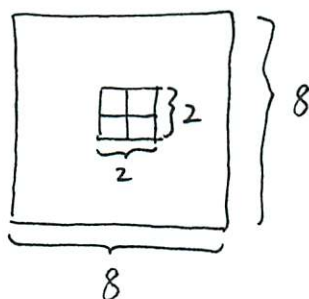
Une pièce :



plus toutes les rotations, translations, etc.



Exercice 1. Trouver la matrice qui décrit le pavage du carré $8 \times 8 - 2 \times 2$ par les 12 pentaminos distinctes ci-dessus.



Exercice 2. Trouver la matrice sur $\{0,1\}$ qui représente un ~~s~~udoku de votre choix. (4 types de contraintes.)

5

Facile

	9		4		8	6		
	5			6		8	4	
4	8		2		3		9	1
	7	4			5			
5			9		2			7
			7			1	8	
7	3		6		4		1	8
	4	8		3			6	
		9	8		7		5	

Moyen

					5			
6	7	1			4			
9	2	5			3			
	6	3			2	1	4	7
	9	7		1		2	5	
5	1	2	6			9	3	
			7			8	1	9
			4			6	2	5
			5					

Difficile

							2	7
	5	2	1	4				
9			5		7		8	
		5	6					
6			8	1	5			4
					4	6		
	1		9		3			2
				8	2	3	1	
2	9							

Expert

5	9		8		4		1	
		2				5		
			2					
3	4				9	6		7
7								3
6		1	5				9	4
					2			
		3				4		
	1		4		5		6	8

Retrouvez toutes les solutions et d'autres grilles sur :
<http://www.programme.tv/sudoku/>