**PAVAGE PAR TRANSLATION**

**Déf:** Un polyomino est un ensemble $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, 4-connexe qui ne possède pas de trou.

Exemple:

$P = \{ (0,0), (1,0), (3,0), (4,0), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1) \}$

**Déf:** Une famille $\{P_i\}_{i \in I}$ de polyominos pave le plan si $\bigcup_{i \in I} P_i = \mathbb{Z}^2$ et $i \neq j \Rightarrow P_i \cap P_j = \emptyset$.

**Déf (Notation):** Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$. On note $P + \mathbf{u} = \{ x + \mathbf{u} | x \in P \}$

**Déf:** Un polyomino $P$ pave le plan par translation s'il existe $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\{ P + k\mathbf{u} + l\mathbf{v} | k, l \in \mathbb{Z} \}$ pave le plan.
**COMBINATOIRE DES MOTS**

* Un ensemble $\Sigma$ appelé alphabet dont les éléments sont appelés des lettres.
* Les éléments $w$ du monoïde libre $\Sigma^*$ sont appelés des mots et on note $w \in \Sigma^*$.
* On écrit $w = w_0 w_1 \cdots w_{n-1}$, $w_i \in \Sigma$.
* La longueur $|w|$ de $w$ est $|w| = n$.
* Si $w = pfs$, alors $p$ est un préfixe, $f$ un facteur et $s$ est un suffixe de $w$.

* Si $w = xy$ et $w' = yx$, alors on dit que $w$ et $w'$ sont conjugués et on écrit $W \equiv W'$.

* Un morphisme est une fonction $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ telle que $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$, $u, v \in \Sigma^*$.

* Un morphisme est dit alphabétique si $|\varphi(\alpha)| = 1$, $\forall \alpha \in \Sigma$.

* Le miroir d'un mot $w = w_0 w_1 \cdots w_{n-1}$ est le mot $w_{n-1} w_{n-2} \cdots w_0 w_0$ et est noté $\overline{w}$.
CODAGE DE FREEMAN

Le codage de Freeman (1961) permet de représenter un chemin 4-connexe de \( \mathbb{Z}^2 \) par un mot sur l'alphabet \( D = \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\} \).

ex: (a) \[ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \] \( w = 000101 \)
(b) \[ \downarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \] \( 01000 = \bar{w} \)
(c) \[ \uparrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \] \( \bar{0} \bar{0} \bar{1} \bar{0} \bar{1} = \bar{w} \)
(d) \[ \downarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \] \( 1 \bar{0} \bar{1} \bar{0} \bar{0} \bar{0} = \bar{w} = \bar{\bar{w}} = \hat{w} \)

ex: (a) \[ \square \] \( 001 \bar{0} \bar{1} \bar{0} \bar{1} = \mathcal{w} \) \( \mathcal{w} \) et \( z \) sont conjugués
(b) \[ \square \] \( 1 \bar{0} \bar{1} \bar{0} \bar{0} \bar{1} = z \) \( \text{ie. } \mathcal{w} = z \)

Définition : Soit \( P \) un polyomino, on note \( b(P) \) l'ensemble des mots de contour de \( P \).
**Théorème de Beauquier-Nivat**

Théorème (Beauquier, Nivat, 1991) Un polyomino $P$ pavé le plan par translation $\iff$ il existe $X, Y, Z \in \mathcal{D}^*$ tels que $XYZXYYZ \leq b(P)$ où au plus un des mots $X, Y, Z$ est vide. $\square$

**Exemple:**

```
X Y Z X \ Y \ Z = 101. 100. 010. 101. 001. 010.
```

**Définition:** Un polyomino dont la BN-factorisation $w = XYZXYYZ$ est telle qu'aucun des facteurs $X, Y, Z$ n'est vide est appelé un pseudo-hexagone.

**Définition:** Un polyomino dont la BN-factorisation $w = XYZXYYZ$ est telle qu'aucun des facteurs $X, Y, Z$ n'est vide est appelé pseudo-carre.

**Rappel:** Certains pseudo-hexagones pavent le plan de plusieurs manières différentes.

**Conjecture (Xavier Provençal, 2008):** Un pseudo-carre pavé le plan en au plus deux manière. $\square$

**Objectif:** Étudier les équations du type $X Y \ Y \ X = A B A B A B$. 
**CHEVAUCHEMENTS**

*Ex: Les mots ‘cheval’ et ‘valet’ “se chevauchent”.*

**Définition:** Soient $u, v \in \mathbb{E}^*$. On dit que $u$ chevauche $v$ avec un décalage $d \in \mathbb{Z}$ si 

$$|v| < d < |u|$$

et s'il existe $s, t \in \mathbb{E}^*$ tels que $d = |s| - |t|$ et $tu$ et $sv$ sont comparables pour l'ordre préfixe.

**Dessins (4 possibilités):**

(a) \[\begin{array}{c}
\text{**u**} \\
\hline
\text{**d**} \\
\hline
\text{**v**} \\
\end{array}\] 

(b) \[\begin{array}{c}
\text{**u**} \\
\hline
\text{**d**} \\
\hline
\text{**v**} \\
\end{array}\]

(c) \[\begin{array}{c}
\text{**u**} \\
\hline
\text{**d**} \\
\hline
\text{**v**} \\
\end{array}\]

(d) \[\begin{array}{c}
\text{**u**} \\
\hline
\text{**d**} \\
\hline
\text{**v**} \\
\end{array}\]

**Exemples:**

(i) ‘cheval’ chevauche ‘valet’ avec décalage 3.


(iii) ‘alphabet’ chevauche ‘tab’ avec décalage 3.

On définit la relation

$$R = \{ (u, v, d) \in \mathbb{E}^* \times \mathbb{E}^* \times \mathbb{Z} \mid u \text{ chevauche } v \text{ avec décalage } d \}$$
Le relation $R$ permet de représenter des équations. En effet,
$$u = v \iff (u, v, 0) \in R \text{ et } |u| = |v|.$$
**Solution Générale**

**Définition:** Soient $u,v \in \Sigma^*$ et $w,z \in \Delta^*$. On dit que $(w,z)$ est une solution du chevauchement $(u,v,d)$ si

1. $(w,z,d) \in \mathbb{F}$
2. Il existe un morphisme alphabétique $\varphi : \Sigma^* \to \Delta^*$ tel que $\varphi(u) = w$ et $\varphi(v) = z$.

**Définition:** On dit que $(w,z)$ est la solution générale du chevauchement $(u,v,d)$ si

1. $(w,z)$ est une solution du chev. $(u,v,d)$
2. Si $(w',z')$ est une solution du chev. $(u,v,d)$, alors $(w',z')$ est aussi solution du chev. $(w,z,d)$.

**Exemples:** 'level' et 'radar' sont des solutions générales du chevauchement $(p,p,o)$ où $|p|=5$.

**Proposition:** Le solution générale d'un chevauchement $(u,v,d)$ est unique à isomorphisme près.

**Remarque:** L'intérêt de la solution générale est que plusieurs de ses propriétés (palindromicité, périodicité...) se propagent à toutes les solutions.
**Plus d’Exemples**

**Ex1:** Quelle est la solution générale du chevauchement $(u, u, 3)$ où $|u| = 7$?

On obtient les égalités $1=4, 2=5, 3=6, 4=7$ que l’on représente par une partition de l’alphabet initial : 
\[ \{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\} \]

On choisit un représentant par classe et on écrit 
\[ u = 1231231 \]

On remarque que 3 est une période de $u$.

**Quelle est la solution générale du chevauchement $(u, u, 3)$ où $|u| = |v| = 7$?**

On obtient la partition 
\[ \{1, 12\}, \{2, 13\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}, \{6, 10\}, \{4, 11\}, \{3, 14\} \]

On choisit un représentant par classe et on obtient 
\[ u = 1234567 \] et \[ v = 4567123 \]

Ainsi, $u$ et $v$ sont conjugués : $u \equiv v$. 

**Ex2:**